



# Dynamique des structures cohérentes en turbulence magnétohydrodynamique

Johann Herault

## ► To cite this version:

Johann Herault. Dynamique des structures cohérentes en turbulence magnétohydrodynamique. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2013. Français. NNT : . tel-00990150

**HAL Id: tel-00990150**

**<https://theses.hal.science/tel-00990150>**

Submitted on 13 May 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Dynamique des structures cohérentes en turbulence magnétohydrodynamique

pour obtenir le grade de

Docteur de l'université Paris Diderot-PARIS VII

Spécialité : Physique

**Johann Herault**

Soutenance prévue le 4 décembre 2013 devant le jury composé de :

Michael Le Bars (rapporteur)  
Frederic Moisy (rapporteur)  
Thierry Alboussière  
Christophe Baudet  
Jacques Magnaudet  
François Pétrélis (directeur de thèse)  
Stephan Fauve (directeur de thèse)

# Résumé

Nous avons étudié expérimentalement la dynamique temporelle ainsi que les différentes transitions associées à l'apparition des structures cohérentes à grandes échelles en turbulence bidimensionnelle (2D). Pour un taux de dissipation constant, l'augmentation progressive d'énergie injectée dans le système favorise la formation de structures à l'échelle du système, dont la structure spatiale ainsi que la dynamique se distinguent de l'écoulement turbulent aux plus petites échelles. Nous avons ainsi quantifié à l'aide des distributions des amplitudes de l'écoulement à grande échelle une transition en présence d'un fond turbulent. De plus, nous avons montré la présence d'une signature spectrale singulière qu'on nomme communément "bruit en  $1/f$ ". Nous proposons un cadre théorique permettant d'expliquer l'origine de ce "bruit en  $1/f$ " dans les écoulements présentant des structures cohérentes. À mesure que le forçage augmente, nous avons observé l'émergence d'une configuration spatiale de vorticité, caractéristique d'une interaction entre l'écoulement à grande échelle avec les échelles d'injection d'énergie. Cet  tat est souvent nommé, par analogie à la condensation de Bose-Einstein, le régime condensé. Du fait de la symétrie du forçage, l'écoulement à grande échelle peut tourner dans les deux sens. Nous avons alors observé des renversements erratiques du sens de l'écoulement à grande échelle, dont les propriétés sont comparées aux modèles de renversements récemment proposés pour expliquer les inversions du champ magnétique terrestre.

# abstract

We experimentally investigated the temporal dynamics and the different transitions associated to the generation of large scale coherent structures in two-dimensional turbulence (2D). For a given dissipation rate, the progressive increase of energy injected into the system gives rise to the formation of a large scale circulation, with spatial structures and temporal dynamics, which differ from the small-scale turbulent background. We have quantified a transition over a turbulent background by studying the probability distributions of the amplitudes of the large-scale flow. Moreover, the large scale flow exhibits a spectral signature commonly called "  $1/f$  noise". We propose a theoretical framework to explain the origin of this "  $1/f$  noise". As the forcing increases, we observed the emergence of a spatial configuration of vorticity, described by the interaction between the forcing scale and the large scale flow. This state is often called , by analogy to the Bose-Einstein condensate, condensed regime. Due to the symmetry of the forcing, the large-scale flow may rotate in both directions. We observed stochastic reversals of the direction of the large-scale flow. The properties of the reversals are compared with the models proposed to explain reversals of Earth's magnetic field.



# Remerciements

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du jury qui m'ont fait l'honneur et le plaisir d'évaluer ce travail. Je remercie tout d'abord Frederic Moisy et Mickael Lebars d'avoir accepté d'être les rapporteurs du manuscrit, ainsi que pour leur enthousiasme sur ce sujet. De même, je remercie Jacques Magnaudet d'avoir présidé ce jury, ainsi que Thierry Alboussière et Christophe Baudet pour leurs commentaires..

Loin d'être cloisonné par un sujet bien délimité, le déroulement de cette thèse fut guidé par le fil directeur tracé par la curiosité scientifique. Cette curiosité fut alimentée et guidée par mes deux directeurs de thèse : Stephan Fauve et François Pétrélis. J'ai appris beaucoup à leur côté et les résultats présentés ici sont fortement tributaires de leur connaissance et de leur travail. De plus, leur aide a dépassé le cadre purement scientifique et professionnel. J'ai profité d'un cadre exceptionnel de travail grâce à leur confiance et leur amitié.

Toujours sur le sujet de la bonne ambiance, je remercie tous mes "co-détenus" successifs de la D24. Tout d'abord Benjamin Miquel, qui a eu le mérite de me remettre sur des roulettes. Basile Gallet, qui au hasard d'une balade dans le parc Mont-Souris m'a suggéré de venir faire une thèse au LPS. Il a d'ailleurs su partager sa maîtrise des outils bibliographiques, tel que Google Scholar. J'ai eu aussi l'honneur de co-dirigé le stage de Guillaume Michel, qui n' a pas démerité son premier flocon en manipulation de Galinstan.

Pour clôturer les remerciements avec mes collègues du groupe de physique de non-linéaire, je remercie Christophe Gissinger, Alexandros Alexakis, Claude Laroche, Nicolas Cornuault, Benoit Semin, Pankaj Mishra et Vassilios Dallas, pour ses excellent moments autour d'un café ou d'un tableau. Je remercie aussi, Artyom Petrosyan, Nicolas Mordant, Pablo Gutiérrez, Sebastien Aumaître et Nabil Garroum pour leur aide sur les parties techniques expérimentales.

Je remercie tout le personnel de direction, administratif et technique du Laboratoire de Physique Statistique pour leur aide au bon déroulement de cette thèse. Un merci tout particulier à Annie Ribaudeau, qui a su s'adapter à notre approche expérimentale de l'administration tout en gardant sa bonne humeur. Je remercie la fine équipe du séminaire thésard du LPS : Ariel, Isabelle et Swan.

J'ai eu le plaisir d'enseigner avec Alexis Duchesne, collègue de galère. Je remercie d'ailleurs toute l'équipe de physique non-linéaire du Laboratoire de MSC (Eric, Luke, Mickael), ainsi que l'équipe géodynamo du LRA (Raphael, Ludovic, Martin et Emmanuel) pour les bons moments passé autour d'un café ou d'une bière en conférence.

L'expérience von Karman Sodium au CEA de Cadarache a été l'opportunité de collaborer avec une partie des membres du groupe SPHYNX du CEA Saclay, composé de François Daviaud, Berengère Dubrulle, Jean Boisson et Sebastien Aumaître (encore

lui!), du laboratoire de Physique de l'ENS Lyon, composé de Sophie Miralles, Nicolas Plihon, Philippe Odier, Gautier Verhille et Jean-François Pinton, ainsi que le personnel technique présent sur le site du CEA, Nicolas Bonnefoy et André Skiara. J'ai passé de très bon moments avec une partie de cette communauté de la "French washing machine", que ce soit à Cadarache ou en conférence.

Ces trois années sur Paris m'ont permis de revoir des amis de longues dates que j'avais quitté au lycée : Pierre, Maite , Jean-Michel, Julie, Julien, Jordan, Fabrice et Samuel. Il y a aussi toute la clique angevine : Julie, Hélène, Flore, Mathieu, Aurore et les Simons, avec qui j'ai eu le ventre retourné plus d'une fois que cela soit sur les manèges de Disneyland ou les huitres de Bretagne. J'ai aussi une pensée pour mes amis de Toulouse, qui ont eu la bonne idée de venir travailler sur Paris après l'école : Thom, Xav', Nico, Sara, Solenne, Sylvain, Alexis et Laetitia. De grands mercis aux Sudistes, Ben et Sego, ainsi que Manu et Clémence, pour leur accueil sur Aix et ses soirées sur les abords de Marseille.

Je remercie aussi toute ma famille pour son soutien, même si mes travaux de recherches ne sont devenus concrets que le jour de ma soutenance. Je les remercie chaudement pour leur confiance.

Je finis ces remerciements par les deux personnes, qui donnent chaque jour un sens à ma vie. Merci Marjorie pour ce soutien inconditionnel et surtout pour m'avoir offert ce qu'il y a de plus précieux pour un homme : le titre de papa, tout aussi honorifique que celui de docteur.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Physique des écoulements bidimensionnels</b>	<b>2</b>
1.1	Introduction . . . . .	3
1.2	Les équations de la magnétohydrodynamique . . . . .	3
1.3	Équations de la MHD pour un champ magnétique intense et $Rm$ et $Lu$ faibles . . . . .	4
1.3.1	Équation de la MHD avec champ magnétique intense . . . . .	4
1.3.2	Simplification des équations . . . . .	4
1.4	Processus de bidimensionnalisation des écoulements turbulents . . . . .	6
1.4.1	Freinage magnétique . . . . .	7
1.4.2	Dissipation anisotrope . . . . .	8
1.4.3	Diffusion de la vorticité verticale . . . . .	8
1.4.4	Les couches limites de Hartmann . . . . .	9
1.5	Des �quations MHD aux équations de Navier-Stokes bidimensionnelles	11
1.5.1	équation de N-S moyennée verticalement . . . . .	11
1.5.2	La friction par la couche de Hartmann . . . . .	13
1.5.3	Le forçage électromagnétique . . . . .	13
1.5.4	Conclusion . . . . .	14
1.6	Physique des écoulements bidimensionnels . . . . .	16
1.6.1	Les �quations . . . . .	16
1.6.2	Turbulence 2D . . . . .	17
1.6.3	La condensation . . . . .	20
1.7	Conclusion . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Description de l'expérience</b>	<b>24</b>
2.1	Descriptif du montage . . . . .	25
2.1.1	Le choix du montage . . . . .	25
2.1.2	Le galinstan et ses propriétés physico-chimiques . . . . .	25
2.1.3	Le montage expérimental . . . . .	27
2.1.4	Le forçage électromagnétique . . . . .	28
2.1.5	Les symétries du forçage . . . . .	30
2.2	L'instrumentation . . . . .	31
2.2.1	Les mesures par les sondes Vives . . . . .	31
2.2.2	Les mesures par la sonde Doppler acoustique . . . . .	32
2.2.3	La mesure du champ de vitesse par le suivi de particules . . . . .	34
2.3	Mesure de la dissipation par friction . . . . .	38
2.3.1	Motivations . . . . .	38

2.3.2	Les mesures . . . . .	38
2.4	Adimensionnement des équations de Navier-Stokes 2D . . . . .	41
2.4.1	Les nombres sans dimension . . . . .	41
2.4.2	Les échelles dissipatives . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Transition de l'écoulement laminaire vers le régime chaotique</b>	<b>43</b>
3.1	Introduction . . . . .	44
3.2	Étude de l'écoulement laminaire . . . . .	45
3.3	L'instabilité fourche . . . . .	49
3.3.1	Les mesures par les sondes Vives . . . . .	49
3.3.2	Un modèle de bifurcation à partir des équations de Navier-Stokes	50
3.4	Bifurcations de Hopf . . . . .	54
3.4.1	Première bifurcation de Hopf . . . . .	54
3.4.2	Seconde bifurcation de Hopf . . . . .	56
3.5	Transition vers le chaos par intermittence . . . . .	59
3.6	Résumé . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Spectres temporels dans le régime turbulent</b>	<b>64</b>
4.1	Introduction . . . . .	65
4.2	Mesures des sondes Vives . . . . .	65
4.2.1	Les spectres temporels . . . . .	65
4.2.2	Distribution des durées entre changements de signe . . . . .	71
4.2.3	Comparaison entre les exposants du spectre et de la distribution	74
4.3	Mesures par sondes Doppler ultrasoniques . . . . .	75
4.4	Observation de structures cohérentes dans l'espace physique . . . . .	78
4.5	Un modèle pour les spectres en $1/f$ . . . . .	81
4.5.1	Introduction . . . . .	81
4.5.2	Discussion sur un modèle classique de bruit en $1/f$ . . . . .	82
4.5.3	Théorie du renouvellement et spectre en $1/f$ . . . . .	82
4.6	Un modèle de processus stochastique pour la distribution $P(\tau)$ . . . . .	85
4.6.1	Introduction . . . . .	85
4.6.2	L'équation maîtresse . . . . .	86
4.6.3	Processus non-markovien : $\Gamma$ dépendant du temps . . . . .	87
4.6.4	Simulations du processus stochastique non-markovien . . . . .	88
4.7	Comparaison avec d'autres études expérimentales et numériques . . . . .	93
4.8	Conclusion . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Transitions entre différents régimes turbulents</b>	<b>96</b>
5.1	Introduction et motivations . . . . .	97
5.1.1	Du régime chaotique au régime turbulent . . . . .	97
5.1.2	Bifurcations entre différents régimes turbulents . . . . .	97
5.1.3	Plan du chapitre . . . . .	98
5.2	Propriétés statistiques des mesures des Sondes Vives . . . . .	99
5.2.1	Norme de $U_L$ . . . . .	99
5.2.2	Coefficient d'aplatissement de $U_L$ . . . . .	101
5.2.3	Bilan . . . . .	102
5.3	Étude de la distribution de $U_L$ . . . . .	102

5.3.1	Les distributions pour la gamme $Rh \leq 12$	102
5.3.2	Études pour la gamme $Rh > 12$	103
5.3.3	Conclusion	112
5.4	Étude des champs moyens de vorticité et lignes de courant	113
5.5	Identification et quantification des récurrences	117
5.5.1	Principe de l'étude	117
5.5.2	Méthodes mathématiques	118
5.5.3	Analyse d'un tracé de récurrence pour $Rh = 30$	119
5.5.4	Analyse et quantification des récurrences	123
5.5.5	Moyenne cohérente	125
5.6	Étude de l'état condensé	127
5.6.1	Mécanisme de sélection de l'état condensé	132
5.6.2	Conclusion	134
5.7	Conclusion sur les différentes transitions	134
<b>6</b>	<b>Renversements de la circulation à grande échelle</b>	<b>136</b>
6.1	Présentation	137
6.2	Statistiques	137
6.2.1	Détection des renversements	137
6.2.2	Fréquence des renversements	139
6.2.3	Distribution des durées entre renversements	141
6.2.4	Fluctuations de $U_L$	142
6.2.5	Bilan	143
6.3	Comparaison des renversements pour deux $Rh$ différents	143
6.4	Dynamique des renversements	150
6.4.1	Introduction	150
6.4.2	Dynamique d'un renversement à $Rh = 42$	151
6.4.3	Comparaison avec un autre renversement	154
6.4.4	Bilan	155
6.5	Discussion sur le mécanisme des renversements	156
6.5.1	Études antérieures	156
6.5.2	Une dynamique de basse dimension	157
6.6	Conclusion	160
<b>7</b>	<b>Étude des temps de décroissance du dipôle et du quadrupôle dans l'expérience VKS</b>	<b>2</b>
7.1	Les campagnes VKS	2
7.2	Le modèle dipôle-quadrupôle	3
7.3	Mesure des temps de décroissance du dipôle et du quadrupôle	4
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>10</b>
8.1	Bilan général	10
8.1.1	Première partie	10
8.1.2	Transitions et symétries	12
8.1.3	Seconde partie	13
8.2	Perspectives	14

# Introduction

## Structures cohérentes et turbulence

Les gaz, les liquides et les plasmas composent la majeure partie de la matière dans l'univers. La formation d'objets astrophysiques comme les galaxies, les étoiles ou les systèmes planétaires, est ainsi déterminée par les propriétés de ces fluides et de leurs écoulements.

Comme les quantités d'énergies mises en jeu et les tailles caractéristiques sont gigantesques, les mouvements des masses de fluide sont en apparence complètement désordonnés. On qualifie généralement ces écoulements de turbulents. Cependant, il existe en astrophysique et en géophysique de nombreux exemples où l'écoulement présente un comportement cohérent aux grandes échelles alors que les petites échelles gardent une dynamique turbulente. Pour illustrer ce phénomène, nous présentons deux cas : les cyclones atmosphériques et la dynamique du champ magnétique terrestre.

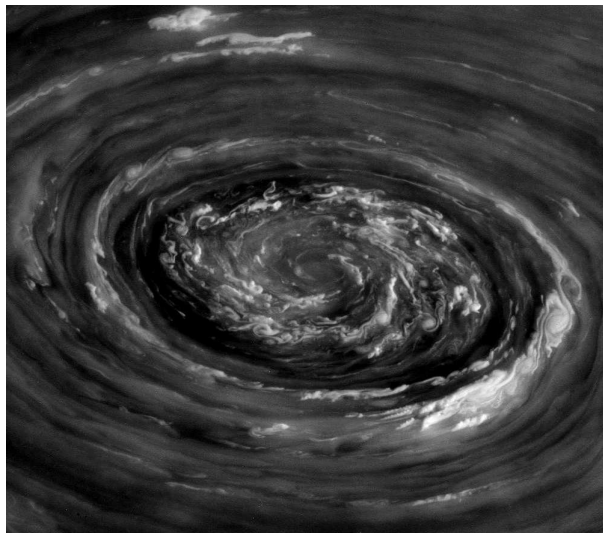


FIGURE 1 – Image de l'ouragan situé au pôle nord de Saturne (Sonde Cassini).

## Les cyclones atmosphériques

Les atmosphères des planètes gazeuses géantes comme Jupiter et Saturne sont propices à l'observation de spectaculaires phénomènes cycloniques cohérents. La sonde Cassini

nous a transmis en 2004 des images d'un impressionnant ouragan (figure 1) localisé au pôle nord de Saturne. Cet évènement cyclonique avait déjà été observé par la sonde Voyager dans les années 80. La taille de l'œil du cyclone est de 2000 km et on constate la présence de tourbillons aux plus petites échelles, caractéristiques des écoulements turbulents. Une des propriétés surprenantes de ce cyclone est sa forme hexagonale, bien identifiable sur la figure 2.

L'autre particularité de ce cyclone est la différence importante entre sa longévité de plus de 30 ans, et son temps de rotation, qu'on estime être d'environ 10 minutes. Usuellement, le temps de vie des structures tourbillonnaires dans un écoulement turbulent ne dépasse pas quelques temps de rotation car il correspond à son temps d'interaction avec l'écoulement turbulent. Après plusieurs temps de retournements, les tourbillons présents dans les écoulements turbulent perdent généralement leur cohérence, tandis que ce cyclone échange continuellement de l'énergie avec la turbulence à petite échelle, tout en gardant sa stabilité.

Même s'il existe des processus physiques à grande échelle pouvant expliquer en partie la stabilité de ces structures [2], la cohérence aux temps longs du cyclone est aussi déterminée par l'influence de la turbulence à plus petite échelle. Ce type d'étude peut fortement se complexifier dès lors que les échelles spatiales des composantes cohérentes et chaotiques de l'écoulement sont comparables.

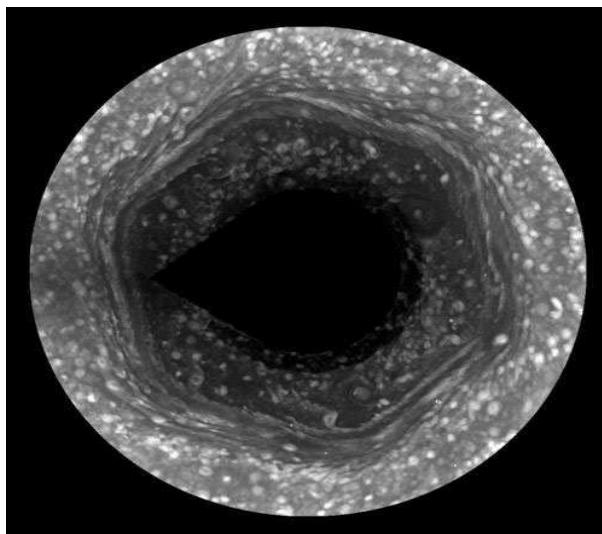


FIGURE 2 – Image montrant la structure hexagonale de l'ouragan situé au pôle nord de saturne (Sonde Cassini). La taille de l'écoulement est de l'ordre de 200 000 km.

## Les renversements du champ magnétique terrestre

Un écoulement fortement turbulent de métal liquide<sup>1</sup> est maintenu par les gradients de températures et de composition dans le noyau externe de la terre. Cet écoulement de métal liquide est à l'origine d'un processus de conversion continue d'énergie cinétique

---

<sup>1</sup>le noyau externe est principalement constitué de Fer et Nickel

en énergie magnétique, qu'on nomme effet dynamo. À la surface de la terre, le champ magnétique a principalement la géométrie d'un dipôle (figure 3), caractérisé par un axe polaire proche de l'axe de rotation de la terre.

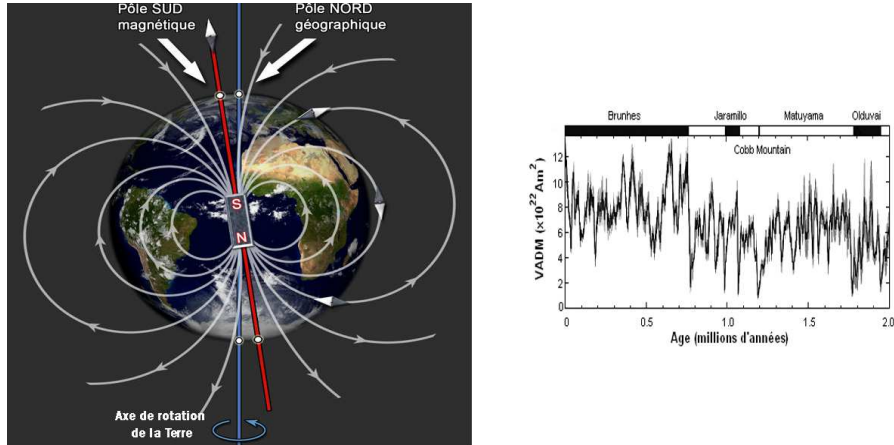


FIGURE 3 – Gauche : illustration du dipôle terrestre. Droite : amplitude du dipôle magnétique terrestre au cours du temps. La bordure supérieure montre le changement de polarité

Actuellement le pôle sud magnétique correspond au pôle nord géographique. Mais l'étude de l'aimantation d'anciennes roches volcaniques a révélé que la polarité du champ magnétique terrestre a changé plusieurs fois depuis que la dynamo terrestre existe. Les pôles du champ magnétique se sont donc renversés de manière spontanée. La durée de ces phases de renversement est typiquement de l'ordre de 10 000 ans alors que les durées séparant deux renversements successifs sont de l'ordre de plusieurs centaines de milliers d'années. On observe sur la figure 3 de droite l'évolution temporelle du champ magnétique, où la couleur du bandeau du haut est associée à la polarité du dipôle et la courbe en dessous à son amplitude. On constate la séparation d'échelle entre la durée d'un renversement et l'intervalle de temps entre deux renversements successifs.

L'origine de ces renversements, ainsi que le rôle joué par la turbulence, est un problème encore ouvert.

## L'expérience VKS

Nous avons présenté deux exemples de structures cohérentes à grande échelle coexistant et interagissant avec un écoulement turbulent. Il n'existe pas encore de consensus sur les mécanismes d'émergence et de stabilité de ces structures. De nombreuses expériences tentent alors de faire le pont entre les observations des phénomènes naturels et les modèles.

L'expérience von Karman Sodium (VKS) se place dans cette axe de recherche. Elle consiste à entraîner du sodium liquide par deux disques en contra-rotation (figure 4 de gauche). L'écoulement est fortement turbulent et les nombres de Reynolds sont de l'ordre de  $10^6$ . Lorsque la vitesse des disques est suffisamment élevée, le



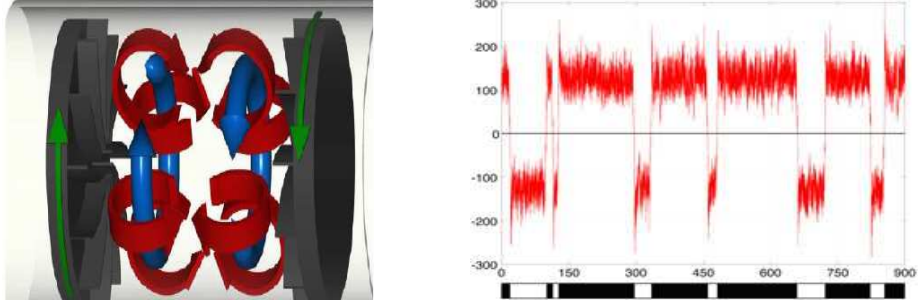


FIGURE 4 – Gauche : écoulement à grande échelle dans l’expérience Von Karman Sodium. Droite : renversements du champ magnétique dans l’expérience VKS.

champ magnétique croît exponentiellement, formant une structure principalement dipolaire dont l’axe est aligné avec l’axe de rotation. Des régimes dynamiques du champ magnétique ont été observés [5] et plus particulièrement des renversements aléatoires de la polarité du dipôle (figure de droite).

Les prédictions du modèle de Pétrélis *et al.* [50] ont permis de décrire plusieurs propriétés de ces régimes dynamiques, comme les renversements ou la localisation de l’énergie [21]. Le modèle repose sur l’existence de deux modes magnétiques dipolaire et quadrupolaire, dont le couplage dépend des symétries du forçage. Dans certaines gammes de paramètres, la présence d’un bruit sur la dynamique de ces deux modes peut déclencher des renversements aléatoires. Le rôle de la turbulence se résume alors à une perturbation stochastique d’un système de basse dimension, composé des modes dipolaire et quadrupolaire.

L’extension de cette approche aux systèmes où la dynamique est purement hydrodynamique, comme pour le premier exemple, revient à poser la question suivante : la dynamique des structures cohérentes dans les milieux turbulents peut-elle être décrite par une dynamique de basse dimension ?

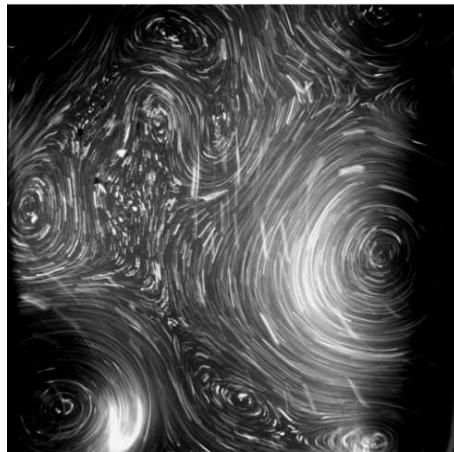


FIGURE 5 – Photographie de l’écoulement étudié dans cette thèse, dans le régime turbulent.

# Turbulence bidimensionnelle

La turbulence bidimensionnelle (2D) est un cadre favorable à l'observation de structures cohérentes, car les processus non-linéaires favorisent les transferts d'énergie des petites vers les grandes échelles. Une photographie de l'écoulement 2D étudié dans cette thèse est représentée sur la figure 5. On constate la présence de structures tourbillonnaires à grande échelle coexistant avec des tourbillons à petites échelles. L'étude expérimentale de la turbulence 2D permet ainsi d'analyser l'émergence et la dynamique de structures cohérentes dans un système physique contrôlé.

Afin d'étudier la dynamique de ces structures, nous avons opté pour un montage expérimental utilisant un métal liquide soumis à un champ magnétique transverse intense. L'avantage de cette configuration expérimentale est la double utilisation du champ magnétique, qui assure la bidimensionnalité et permet de forcer l'écoulement en volume.

Nous analyserons les propriétés de ces structures à grandes échelles ainsi que leurs interactions avec le milieu turbulent. Notre étude se concentre autour des deux problématiques suivantes

- **Comment déterminer et quantifier l'émergence des structures à grande échelle ?**
- **Quelles sont la dynamique temporelle et la signature fréquentielle de ces structures ?**

## Structure du manuscrit

Cette thèse comporte deux parties. La **première partie**, qui constitue la plus grande part de ce document, porte sur **l'étude expérimentale d'un écoulement bidimensionnel turbulent** de métal liquide forcé électromagnétiquement.

Dans un premier temps, nous rappelons au **chapitre 1**, les mécanismes assurant la bidimensionnalité des écoulements de métal liquide soumis à un champ magnétique intense. Nous montrons que sous certaines conditions, la dynamique de l'écoulement peut être décrite par l'équation de Navier-Stokes bidimensionnelle avec une dissipation par friction linéaire. A la fin de ce chapitre, nous présentons les propriétés des écoulements bidimensionnels turbulents.

Dans le **chapitre 2**, nous détaillons les propriétés du montage expérimental ainsi que les techniques de mesures utilisées. Nous vérifions aussi la bidimensionnalité de l'écoulement, en montrant que la dissipation de l'écoulement à grande échelle est dominée par la friction linéaire, variant linéairement avec le champ magnétique. Les nombres sans dimension caractérisant les régimes de l'écoulement sont présentés à la fin de ce chapitre.

Dans le **chapitre 3**, nous décrivons les instabilités successives qui mènent l'écoulement laminaire au régime chaotique. La transition est caractérisée par la succession d'une bifurcation fourche supercritique, puis de deux bifurcations de Hopf supercritiques. Nous expliquons ces observations grâce à des arguments de symétrie, qui contraignent les formes normales de ces instabilités. Finalement, l'écoulement transite

vers le chaos par un scénario d'intermittence, où le régime chaotique apparaît par bouffées de durées aléatoires.

Nous étudions les propriétés spectrales de la composante grande échelle de l'écoulement turbulent dans le **chapitre 4**. Ce chapitre est dédié à l'étude des spectres temporels de la composante grande échelle. Ces spectres présentent un comportement particulier aux basses fréquences, qu'on nomme bruit en  $1/f$ . Nous démontrons que l'exposant associé à la loi de puissance de ces spectres est déterminé par les propriétés statistiques des changements de signe de l'écoulement à grande échelle.

Le **chapitre 5** est consacré à l'étude des deux transitions observées dans le régime turbulent. Nous montrons que l'émergence des structures à grande échelle peut être quantifiée par la forme des distributions de leurs amplitudes. Nous décrivons cette transition en décomposant les distributions en la somme de deux gaussiennes, dont les valeurs les plus probables semblent suivre une courbe de bifurcation.

La seconde transition est associée à l'apparition continue d'une structure spatiale particulière dans l'écoulement. Après avoir quantifié cette transition, nous montrons que la forme de cette structure peut être expliquée par la présence d'une rétroaction des grandes échelles sur le forçage. Cette bifurcation caractérise la transition de l'écoulement de l'état turbulent à l'état condensé.

Nous décrivons ensuite l'observation de renversements de la composante à grande échelle de l'écoulement dans le **chapitre 6**. Ces renversements correspondent à la dynamique temporelle de l'état condensé. Les propriétés statistiques et la dynamique de ces renversements indiquent que l'écoulement devient de plus en plus cohérent à mesure que le forçage augmente pour une dissipation constante. Ces résultats sont comparés aux précédentes études de renversements en turbulence bidimensionnelle.

La **deuxième partie** du manuscrit est consacrée **au travail expérimental** effectué durant cette thèse **sur l'expérience Von Karman Sodium (VKS)**. Les résultats sont présentés sous forme d'un article.

Dans le **chapitre 7**, nous proposons une méthode pour extraire les temps de décroissance des modes dipolaire et quadrupolaire, les deux modes contribuant à la plus grande part de l'énergie magnétique dans l'expérience VKS. Nos mesures permettent d'estimer les seuils d'instabilités respectifs des modes dipolaire et quadrupolaire. Nous montrons que la proximité de ces deux seuils est associée à l'existence de régimes dynamiques du champ magnétique au dessus du seuil de la dynamo. Ces résultats sont en accord avec les prédictions du modèle décrivant les régimes dynamiques de VKS [50].

## Première partie

# Étude expérimentale de la turbulence bidimensionnelle



# Chapitre 1

## Physique des écoulements bidimensionnels

### Sommaire

---

1.1	Introduction . . . . .	3
1.2	Les équations de la magnétohydrodynamique . . . . .	3
1.3	Équations de la MHD pour un champ magnétique intense et $Rm$ et $Lu$ faibles . . . . .	4
1.3.1	Équation de la MHD avec champ magnétique intense . . . .	4
1.3.2	Simplification des équations . . . . .	4
1.4	Processus de bidimensionnalisation des écoulements tur- bulents . . . . .	6
1.4.1	Freinage magnétique . . . . .	7
1.4.2	Dissipation anisotrope . . . . .	8
1.4.3	Diffusion de la vorticité verticale . . . . .	8
1.4.4	Les couches limites de Hartmann . . . . .	9
1.5	Des équations MHD aux équations de Navier-Stokes bi- dimensionnelles . . . . .	11
1.5.1	Équation de N-S moyennée verticalement . . . . .	11
1.5.2	La friction par la couche de Hartmann . . . . .	13
1.5.3	Le forçage électromagnétique . . . . .	13
1.5.4	Conclusion . . . . .	14
1.6	Physique des écoulements bidimensionnels . . . . .	16
1.6.1	Les équations . . . . .	16
1.6.2	Turbulence 2D . . . . .	17
1.6.3	La condensation . . . . .	20
1.7	Conclusion . . . . .	21

---

## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous décrirons comment un écoulement de métal liquide soumis à un champ magnétique transverse intense devient bidimensionnel. Nous montrerons que sous certaines conditions, les équations de la magnétohydrodynamiques (MHD) tridimensionnelles (3D) se simplifient pour donner l'équation de Navier-Stokes bidimensionnelle (2D) comportant un terme de friction linéaire. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous présenterons les principales propriétés des écoulements turbulents bidimensionnels.

## 1.2 Les équations de la magnétohydrodynamique

Les fluides conducteurs d'électricité, comme les métaux liquides ou les plasmas, sont caractérisés par la présence des charges libres, qui peuvent engendrer des champs électriques et magnétiques.

Pour décrire ces écoulements, il existe un cadre théorique où la dynamique se simplifie à celle du champ de vitesse  $\mathbf{v}$  et du champ magnétique  $\mathbf{B}$ . On se place alors dans le cadre de la magnétohydrodynamique (MHD). L'utilisation des équations de la MHD nécessite que les vitesses soient non-relativistes et que les temps de relaxation des charges électriques soient très faibles devant les temps caractéristiques de l'écoulement et les fréquences cyclotron des charges électriques.

Les équations de la magnétohydrodynamique pour un fluide incompressible sont alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} + \eta \Delta \mathbf{B}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad (1.1)$$

avec  $\nu$  la viscosité cinématique,  $\eta$  la diffusivité magnétique,  $\rho$  la masse volumique et  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide. La diffusivité magnétique s'exprime en fonction de la conductivité électrique  $\sigma$  et de la perméabilité  $\mu_0$ , telle que  $\eta = (\sigma \mu_0)^{-1}$ .

Ces équations sont l'équation de Navier-Stokes (N-S), l'équation de conservation de la masse et l'équation d'induction.

La force de Laplace  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  peut s'exprimer uniquement en fonction de  $\mathbf{B}$  grâce à l'équation de Maxwell-Faraday, ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \times \mathbf{B} &= (\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} - \nabla \left( \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Le gradient  $\nabla |\mathbf{B}|^2$  peut être inclus dans le terme de pression avec  $\pi = p + |\mathbf{B}|^2/(2\mu_0)$ . Le terme  $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}$  correspond à la tension magnétique. On obtient alors les équations suivantes

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \pi + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\mu_0 \rho} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} & , \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} + \eta \Delta \mathbf{B} \end{cases} \quad (1.3)$$

Ces équations comportent sept inconnues, qui sont les trois composantes du champ de vitesse  $\mathbf{v}$  et du champ magnétique  $\mathbf{B}$ , ainsi que la pression  $\pi$ .

## 1.3 Équations de la MHD pour un champ magnétique intense et $Rm$ et $Lu$ faibles

### 1.3.1 Équation de la MHD avec champ magnétique intense

Nous allons tout d'abord développer les équations de la MHD dans le cas où l'écoulement est soumis à un champ magnétique externe. On décompose le champ magnétique  $\mathbf{B}$ , en  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{b}$ , avec  $B_0$  le champ appliqué, que nous supposons uniforme et  $\mathbf{b}$  le champ magnétique engendré par les effets inductifs. Les équations de la magnétohydrodynamique se développent alors comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla \pi + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\mu_0 \rho} B_0 \partial_z \mathbf{b} + \frac{1}{\mu_0 \rho} \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} & \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b}) &= B_0 \partial_z \mathbf{v} + \eta \Delta \mathbf{b} \end{aligned} \quad (1.4)$$

### 1.3.2 Simplification des équations

Nous souhaitons simplifier les équations 1.4 en montrant que la composante  $\mathbf{b}$  est négligeable par rapport au champ magnétique appliqué  $B_0$ . Le champ  $\mathbf{b}$  est créé par l'induction à partir du champ  $B_0$ , grâce au terme  $B_0 \partial_z \mathbf{v}$ . Dans l'équation d'induction, deux termes sont en compétition pour équilibrer ce terme source

- le terme dissipatif  $\eta \Delta \mathbf{b}$ , qui est de l'ordre de  $\eta L^{-2} b$ ,
- le terme d'induction  $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b})$ , qui est de l'ordre de  $VL^{-1} b$ .

avec  $V$  et  $L$  la vitesse et la longueur caractéristiques de l'écoulement et  $b$  l'amplitude du champ magnétique. Le rapport entre ces deux termes est donné par le nombre de Reynolds magnétique  $Rm$  défini par

$$Rm = \frac{[\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b})]}{[\eta \Delta \mathbf{b}]} = \frac{VL}{\eta} \quad (1.5)$$

Les écoulements que nous étudierons ont des nombres de Reynolds magnétiques très faibles. Dans notre expérience, les vitesses maximales atteignent  $0.1 \text{ m/s}$  et la taille du domaine est  $L \simeq 10^{-2} \text{ m}$ . La diffusivité magnétique du galinstan valant  $\eta = 0.23 \text{ m}^2/\text{s}$ ,



le nombre de Reynolds magnétique associé à l'écoulement est donc  $Rm \simeq 5 \cdot 10^{-2}$ . Le terme d'induction  $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b})$  est ainsi négligeable par rapport au terme dissipatif. L'équation d'induction devient alors

$$\partial_t \mathbf{b} = B_0 \partial_z \mathbf{v} + \eta \Delta \mathbf{b} \quad (1.6)$$

Nous définissons  $\tau_b$  le temps typique de variation du champ magnétique  $\mathbf{b}$ , tel que  $[\partial_t \mathbf{b}] = b/\tau_b$  et  $h$  la longueur caractéristique dans la direction parallèle au champ magnétique  $\mathbf{B}_0$ . Nous souhaitons comparer le temps  $\tau_b$  au temps de dissipation Joule  $\tau_\eta = h^2/\eta$ , et montrer que  $\tau_b \gg \tau_\eta$ , pour finalement négliger le terme  $\partial_t \mathbf{b}$  dans l'équation d'induction. Il apparait deux temps  $\tau_b$  typiques de variation du champ magnétique où

- $\tau_b$  est donné par le temps d'advection  $h/V$ , avec  $V$  l'amplitude caractéristique du champ de vitesse.
- $\tau_b$  est lié au temps de propagation des ondes d'Alfvén  $h/v_A$ , avec  $v_A$  la vitesse de phase des ondes d'Alfvén.

Dans le premier cas, le rapport  $\tau_\eta/\tau_b$ , qui est donné par le nombre de Reynolds magnétique  $Rm_h = Vh/\eta$  construit à partir de l'épaisseur  $h$ , est très faible (de l'ordre de  $10^{-2}$ ) dans notre expérience. Dans ce cas, les fluctuations du champ magnétique  $\mathbf{b}$  induites par le champ de vitesse  $\mathbf{v}$  sont très rapidement amorties par les effets dissipatifs.

Dans le second cas, la prise en compte de la tension magnétique  $B_0 \partial_z \mathbf{b}$  dans l'équation de Navier-Stokes permet la propagation d'ondes dites d'Alfvén dans la direction de  $\mathbf{B}_0$ , dues aux effets couplés de la tension magnétique et du terme d'induction. Ces ondes magnétohydrodynamiques sont transverses au champ magnétique  $\mathbf{B}_0$ . La vitesse de phase  $v_A$  des ondes d'Alfvén est donnée par

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\rho \mu_0}} \quad (1.7)$$

Elle peut être plus grande que l'amplitude du champ de vitesse  $V$ , si le champ magnétique est assez intense. En effet, la vitesse des ondes d'Alfvén dans le Galinstan et pour une intensité de champ magnétique valant  $B_0 = 0.1T$ , est de l'ordre de  $v_A = 1m/s$ , alors que  $V = 10^{-1}m/s$ . Le temps typique de variation du champ magnétique est donc de l'ordre de  $\tau_b = h/v_A$ . Nous définissons alors le nombre de Lundquist  $Lu$  comme le rapport entre le temps de dissipation Joule sur le temps de propagation des ondes d'Alfvén

$$Lu = \frac{\tau_\eta}{\tau_b} = \frac{v_A h}{\eta} \quad \text{soit} \quad Lu = B_0 h \sigma \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} \quad (1.8)$$

Ce nombre sans dimension peut être interprété comme un nombre de Reynolds magnétique pour les ondes d'Alfvén. Pour négliger les effets inertiels du champ magnétique, il faut que le nombre de Lundquist soit très faible, c'est à dire  $Lu \ll 1$ . Ce nombre sans dimension est de l'ordre  $10^{-1}$  pour  $h = 10^{-2}m$ . Ces ondes sont donc rapidement amorties par les effets dissipatifs. Le champ magnétique  $\mathbf{b}$  est finalement donné par l'équation stationnaire

$$B_0 \partial_z \mathbf{v} + \eta \Delta \mathbf{b} = 0 \quad (1.9)$$

Le champ magnétique suit donc adiabatiquement les variations du champ de vitesse. Le rapport entre la composante  $\mathbf{b}$  et le champ appliqué  $B_0$  est aussi donné par le nombre de Reynolds magnétique. Le terme source étant de l'ordre de  $B_0 V h^{-1}$ , l'équilibre entre les deux termes de l'équation 1.9 implique que

$$[B_0 \partial_z \mathbf{v}] = [\eta \Delta \mathbf{b}] \quad \text{ainsi} \quad \frac{B_0 V}{h} = \frac{\eta b}{h^2} \quad (1.10)$$

En utilisant la définition du nombre de Reynolds magnétique, on montre que  $b$  est de l'ordre de  $Rm_h B_0$  et donc que cette composante est négligeable par rapport au champ magnétique appliqué. Nous pouvons dès lors négliger le terme  $\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}$  devant le terme  $B_0 \partial_z \mathbf{b}$ .

Finalement, lorsque le nombre de Reynolds magnétique  $Rm$  et le nombre de Lundquist  $Lu$  sont très petits devant un, les équations de la MHD deviennent

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \pi + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\mu_0 \rho} B_0 \partial_z \mathbf{b}, & \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ 0 = B_0 \partial_z \mathbf{v} + \eta \nabla \mathbf{b} \end{cases} \quad (1.11)$$

## 1.4 Processus de bidimensionnalisation des écoulements turbulents

Dans cette section, nous allons montrer comment les processus d'induction associés aux forces de Laplace atténuent les gradients dans la direction du champ magnétique  $B_0$ . Nous considérerons un écoulement de vitesse  $\mathbf{v}$ , compris dans une couche d'épaisseur  $h$  (figure 1.1). L'épaisseur  $h$  est faible devant les dimensions transverses  $L$ .

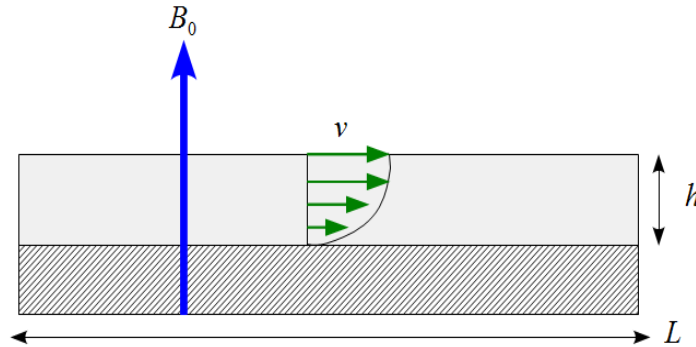


FIGURE 1.1 – Schéma de l'écoulement soumis à un champ magnétique transverse et compris dans une couche de faible épaisseur  $h$  comparé aux dimensions transverses  $L$ . La partie hachurée correspond à la paroi inférieure.

Nous supposons que le temps advectif  $\tau_a = L/V$  est beaucoup plus petit que le temps diffusif  $\tau_\nu = L^2/\nu$ . Cette hypothèse implique que l'écoulement est caractérisé

par un nombre de Reynolds  $Re$  grand devant un. En effet, le nombre de Reynolds est défini<sup>1</sup> comme le rapport entre le temps diffusif  $\tau_\nu = L^2/\nu$  et le temps d'advection  $\tau_a = L/V$

$$Re = \frac{[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}]}{[\nu \Delta \mathbf{v}]} = \frac{\tau_\nu}{\tau_a} = \frac{VL}{\nu} \quad (1.12)$$

Les écoulements ayant des nombres de Reynolds  $Re$  élevés sont généralement turbulents. Nous étudierons plus en détails les propriétés des écoulements turbulents à la fin de chapitre.

Le fait d'avoir  $Re \gg 1$  n'est pas en contradiction avec  $Rm \ll 1$ . En effet le nombre de Reynolds magnétique  $Rm$  vaut  $PmRe$ , avec le nombre de Prandtl magnétique valant  $Pm = \nu/\eta$ . Or il est de l'ordre de  $Pm \simeq 10^{-6}$  pour les métaux liquides. Nous pouvons donc nous placer dans le régime  $Re \gg 1$  et  $Rm \ll 1$ .

### 1.4.1 Freinage magnétique

Nous allons exprimer la tension magnétique  $B_0 \partial_z \mathbf{b}$  en fonction de  $\mathbf{v}$  pour ne faire apparaître que le champ de vitesse dans l'équation de Navier-Stokes. Nous posons  $\Delta^{-1}$  l'opérateur inverse du Laplacien, tel que  $\Delta^{-1} \Delta = \mathbf{I}_d$ , avec  $\mathbf{I}_d$  l'opérateur identité. L'opérateur  $\Delta^{-1}$  est bien défini dans l'espace de Fourier, comme nous le verrons par la suite. L'équation d'induction 1.11 se met alors sous la forme suivante

$$\eta \Delta \mathbf{b} = -B_0 \partial_z \mathbf{v} \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{b} = -\frac{B_0}{\eta} [\Delta^{-1} \partial_z] \mathbf{v} \quad (1.13)$$

En utilisant la définition de la diffusivité magnétique  $\eta = (\sigma \mu_0)^{-1}$ , la tension magnétique vaut

$$\begin{aligned} \frac{B_0}{\rho \mu_0} \partial_z \mathbf{b} &= -\frac{B_0}{\rho \mu_0} \frac{B_0}{\eta} [\Delta^{-1} \partial_{zz}] \mathbf{v} \\ &= -\frac{\sigma B_0^2}{\rho} [\Delta^{-1} \partial_{zz}] \mathbf{v} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Nous reconnaissons le temps de freinage magnétique  $\tau_m$  donné par

$$\tau_m = \frac{\rho}{\sigma B_0^2} \quad (1.15)$$

Finalement l'équation de Navier-Stokes 1.11 devient

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \pi - \nu \Delta \mathbf{v} = -\frac{1}{\tau_m} [\Delta^{-1} \partial_{zz}] \mathbf{v} \quad (1.16)$$

Pour un champ magnétique de l'ordre de 0.1T, une masse volumique de l'ordre de  $10^3 \text{ kg/m}^3$  et une conductivité de l'ordre de  $10^6 \text{ S/m}^2$ , on obtient un temps de freinage de l'ordre de  $\tau_m \simeq 0.1 \text{ s}$ .

---

<sup>1</sup>il est aussi défini comme le rapport entre les termes inertiels et visqueux

La fréquence associée est bien plus grande que la fréquence des fluctuations du champ de vitesse. En effet, le rapport de ces deux fréquences est donné par le paramètre d'interaction  $N$

$$N = \frac{L}{V\tau_m} = \frac{\sigma B_0^2 L}{V\rho} \quad (1.17)$$

avec  $L/V$  de l'ordre du Hertz, on a alors  $N = 10$ . Le temps freinage magnétique est donc un ordre de grandeur plus court que les temps caractéristiques de l'écoulement.

Nous allons décrire l'effet de ce freinage magnétique sur l'écoulement dans les prochaines sections.

### 1.4.2 Dissipation anisotrope

L'interprétation de l'opérateur  $\Delta^{-1}\partial_{zz}$  est plus intuitive dans l'espace de Fourier. On suppose alors que le champ de vitesse  $\mathbf{v}$  se décompose sur les modes de Fourier spatiaux de vecteurs d'onde  $\mathbf{k}$ , tels que

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{v}}(t, \mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (1.18)$$

La transformée de Fourier (TF) de la force de Laplace devient alors

$$\text{TF} [-\tau_m^{-1}\Delta^{-1}\partial_{zz}\mathbf{v}] = -\frac{1}{\tau_m} \frac{k_z^2}{|\mathbf{k}|^2} \hat{\mathbf{v}}(t, \mathbf{k}) \quad (1.19)$$

avec  $k_z$  la composante verticale du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Ce terme amortit toutes les composantes de Fourier qui ont une composante  $k_z$  non-nulle. La freinage magnétique opère donc uniquement sur les perturbations du champs de vitesse ayant une dépendance en  $z$ .

### 1.4.3 Diffusion de la vorticité verticale

Il est possible d'interpréter le freinage magnétique comme un terme de diffusion dans la direction verticale [13]. Nous considérons un vortex de rayon  $l$  dont l'axe de rotation est parallèle au champ magnétique  $B_0$  (figure 1.2), et de hauteur grande devant son rayon  $l$ . L'évolution de la vorticité verticale du tourbillon est donnée par l'équation de vorticité<sup>2</sup>, obtenue en appliquant l'opérateur rotationnel à l'équation 1.16 , ainsi

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega_z - \nu \Delta \omega_z = -\frac{1}{\tau_m} \Delta^{-1} \partial_{zz} \omega_z \quad (1.20)$$

On suppose alors que l'opérateur  $\Delta^{-1}$  peut être approximé par  $\Delta^{-1} \approx -l^2$  . Nous pouvons définir une viscosité magnétique  $\nu_m$  telle que  $\nu_m = l^2/\tau_m$ . L'équation ci-dessus devient alors

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega_z - \nu \Delta \omega_z = \nu_m \partial_{zz} \omega_z \quad (1.21)$$

---

<sup>2</sup>Nous négligeons l'étirement vorticit ire  $\omega \cdot \nabla v_z$ .

Il apparaît alors un terme supplémentaire de diffusion dans la direction verticale, dont le temps de diffusion est plus court que les temps associés à l'écoulement pour  $N \gg 1$ . Le mécanisme de diffusion peut être décrit par des arguments qualitatifs schématisés sur la figure 1.2.

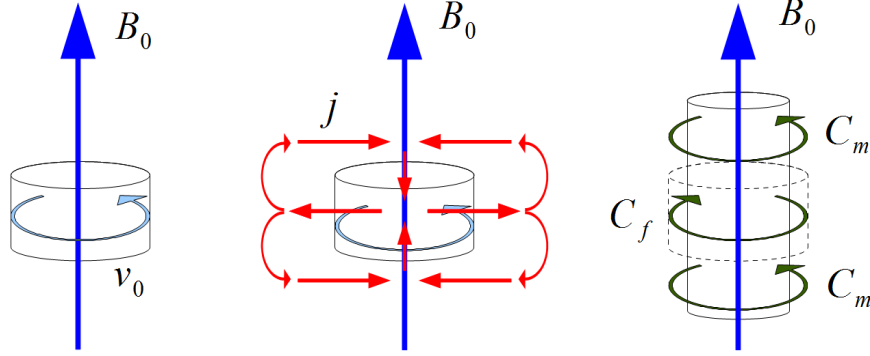


FIGURE 1.2 – Schéma de la diffusion de la vorticité le long du champ magnétique. Le vortex placé dans un champ magnétique induit des courants radiaux divergents (figure de gauche). Ces courants rebouclent à l'extérieur du vortex (figure du milieu) et engendrent des couples moteurs ( $C_m$ )   l'extérieur du vortex et freinant ( $C_f$ ) dans le vortex (figure de droite).

La vitesse azimutale du vortex engendre une force électromotrice  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0$ , qui est à l'origine d'un courant radial donné par la loi d'Ohm

$$\mathbf{j} = \sigma (u_\theta \mathbf{e}_\theta) \times (B_0 \mathbf{e}_z) \quad \text{ainsi} \quad j_r = \sigma u_\theta B_0 \quad (1.22)$$

Un vortex initialement placé dans un champ magnétique induit donc des courants radiaux divergents (figure de gauche et milieu). Pour assurer la conservation de la charge  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  (figure du milieu), les courants doivent reboucler à l'extérieur du vortex. Il existe donc des courants convergents à l'extérieur du vortex. La force de Laplace  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}_0$  associée à ces courants est égale à

$$\mathbf{F}_L = (j_r \mathbf{e}_r) \times (B_0 \mathbf{e}_z) \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{F}_L = -j_r B_0 \mathbf{e}_\theta \quad (1.23)$$

La force de Laplace est donc à l'origine d'un couple freinant à l'intérieur du vortex car  $j_r > 0$  et d'un couple moteur à l'extérieur car  $j_r < 0$ . Le fluide au-dessus et en-dessous du tourbillon est donc entraîné en rotation alors que le vortex initial ralentit.

Dans l'expérience que nous présenterons dans le chapitre suivant, l'épaisseur du fluide est de  $h = 2\text{cm}$  et l'échelle d'injection de la vorticité est de l'ordre du diamètre des électrodes, c'est à dire  $l \approx 0.5\text{cm}$ , soit  $l/h < 1$ . Le processus présenté dans cette section est donc pertinent pour décrire la bidimensionnalisation de l'écoulement dans le cadre de notre expérience.

#### 1.4.4 Les couches limites de Hartmann

Le champ magnétiques tend donc à uniformiser l'écoulement dans la direction verticale. Cependant, la présence de parois transverses au champ magnétique va nécessairement

engendrer des gradients verticaux du fait de la condition d'adhérence à la paroi. Nous ne considérerons dans la suite du chapitre que la présence d'une paroi inférieure.

Il existe donc, proche de cette paroi, une compétition entre le freinage magnétique, qui ici correspond plutôt à de l'entraînement magnétique, et les effets visqueux. Cette zone est appelée couche limite de Hartmann [32].

Le processus physique d'établissement de la couche limite est décrit sur la figure 1.3. La figure représente les différents mécanismes qui conduisent à la localisation de la couche limite dans une épaisseur  $\delta_H$

- On impose initialement un champ magnétique perpendiculairement à la paroi  $B_0 \mathbf{e}_z$ , qui diffuse à travers les lignes de courant.
- Le cisaillement déforme le champ magnétique en créant une composante  $\mathbf{b}$ , grâce au terme  $B_0 \partial_z \mathbf{v}$ .
- La tension magnétique  $B_0 \partial_z \mathbf{b}$  (flèches rouges) rétroagit sur l'écoulement pour atténuer la déformation du champ magnétique et donc le cisaillement.
- Le cisaillement est maintenant concentré dans une épaisseur  $\delta_H$ , où la tension magnétique et la contrainte visqueuse s'équilibrent.

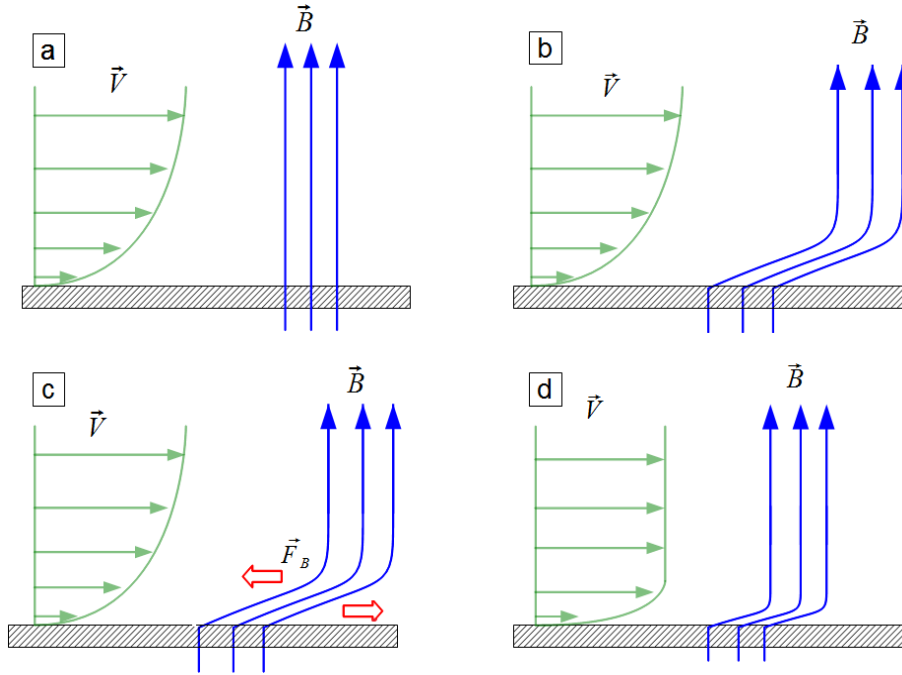


FIGURE 1.3 – Schéma illustrant le développement de la couche limite de Hartmann.

L'équilibre entre la tension magnétique et la contrainte visqueuse implique que le temps de freinage magnétique  $\tau_m = \rho/(B_0^2 \sigma)$  est de l'ordre du temps de la diffusion visqueuse,  $\tau_\nu = \delta_H^2/\nu$ . On obtient alors en posant  $\tau_\nu = \tau_m$

$$\frac{\delta_H^2}{\nu} = \frac{\rho}{\sigma B_0^2} \quad \text{ainsi} \quad \delta_H = \sqrt{\frac{\rho \nu}{\sigma B_0^2}} \quad (1.24)$$

Le nombre de Hartmann  $Ha$  définit le rapport entre l'épaisseur de fluide  $h$  et l'épaisseur de la couche limite  $\delta_H$  donnée par

$$Ha = \frac{h}{\delta_H} = hB_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} \quad (1.25)$$

Dans l'expérience présentée dans le prochain chapitre, nous montrerons que le nombre de Hartmann vaut 100. La couche de Hartmann correspond ainsi à seulement 1% de l'épaisseur du fluide.

## 1.5 Des équations MHD aux équations de Navier-Stokes bidimensionnelles

Dans la limite  $N \gg 1$  et  $Ha \gg 1$ , le freinage magnétique a amorti tous les gradients dans la direction verticale, excepté dans la couche de Hartmann dont la taille est faible devant l'épaisseur du fluide. Le but de cette section est de montrer qu'un terme de friction linéaire apparaît dans l'équation de Navier-Stokes à cause de la couche limite de Hartmann (figure 1.4). Nous expliquerons aussi comment l'écoulement peut être forcé en injectant du courant par la paroi du fond.

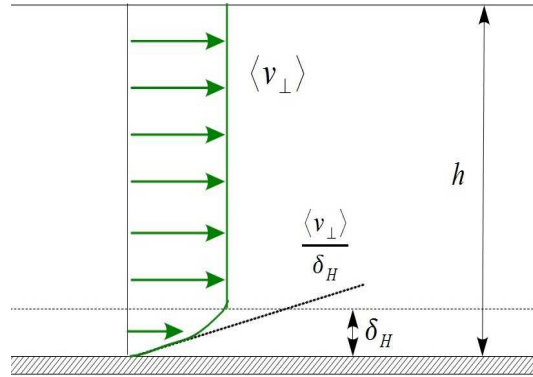


FIGURE 1.4 – Illustration du profil de vitesse dans la limite  $N \gg 1$  et  $Ha \gg 1$ .

### 1.5.1 Équation de N-S moyennée verticalement

Nous souhaitons décrire l'évolution de la composante de vitesse transverse au champ magnétique à partir de l'équations de Navier-Stokes 3D. On décompose alors la vitesse en une composante perpendiculaire plus une composante parallèle au champ magnétique avec  $\mathbf{v} = v_\perp \mathbf{e}_\perp + v_z \mathbf{e}_z$ . Quant aux opérateurs différentiels, il se décomposent tels que

$$\Delta = \Delta_\perp + \partial_{zz} \quad \nabla = \nabla_\perp + \mathbf{e}_z \partial_z \quad (1.26)$$

Grâce à l'équation de la conservation de la masse, nous pouvons estimer l'amplitude de la vitesse  $v_z$

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp} = -\partial_z v_z \quad \text{ainsi} \quad v_z \sim \frac{h}{L} |\mathbf{v}_{\perp}| \quad (1.27)$$

Comme l'épaisseur  $h$  est très petite devant  $L$ , nous pouvons considérer  $v_z$  nulle. Ainsi l'évolution de  $v_{\perp}$  est donnée par

$$\partial_t \mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{v}_{\perp} + \frac{1}{\rho} \nabla_{\perp} \pi - \nu \Delta_{\perp} \mathbf{v}_{\perp} = \nu \partial_{zz} \mathbf{v}_{\perp} + \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B}_0 \quad (1.28)$$

Nous avons exprimé la force de Laplace en fonction de  $\mathbf{j}$ . On s'intéresse à la moyenne spatiale verticale de l'équation de Navier-Stokes définie par

$$\langle \cdot \rangle = h^{-1} \int_0^h (\cdot) dz \quad (1.29)$$

avec  $h$  l'épaisseur de fluide. Ainsi l'équation de Navier-Stokes moyennée est donnée par

$$\langle \partial_t \mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{v}_{\perp} + \frac{1}{\rho} \nabla_{\perp} \pi - \nu \Delta_{\perp} \mathbf{v}_{\perp} \rangle = \langle \nu \partial_{zz} \mathbf{v}_{\perp} \rangle + \frac{1}{\rho} \langle \mathbf{j} \times \mathbf{B}_0 \rangle \quad (1.30)$$

avec  $\langle \mathbf{v}_{\perp} \rangle$  la moyenne du profil de vitesse

$$\langle \mathbf{v}_{\perp} \rangle = h^{-1} \int_0^h (\mathbf{v}_{\perp}) dz \quad (1.31)$$

La grandeur  $\langle \mathbf{v}_{\perp} \rangle h$  peut être interprétée comme le débit linéique à travers l'épaisseur  $h$ . Pour les termes du membre de gauche de l'équation 1.30, l'opérateur de moyenne peut être permuté avec les opérateurs  $\partial_t$ ,  $\nabla_{\perp}$  et  $\Delta_{\perp}$ . Quant au terme non-linéaire, il se décompose en

$$\langle \mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{v}_{\perp} \rangle = \langle \mathbf{v}_{\perp} \rangle \cdot \nabla_{\perp} \langle \mathbf{v}_{\perp} \rangle + \langle \mathbf{v}'_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{v}'_{\perp} \rangle \quad (1.32)$$

car le champ de vitesse se décompose en une composante moyenne  $\langle \mathbf{v}_{\perp} \rangle$  plus une composante  $\mathbf{v}'_{\perp}$  variable selon  $z$ , tel que

$$\mathbf{v}_{\perp} = \langle \mathbf{v}_{\perp} \rangle(x, y) + \mathbf{v}'_{\perp}(x, y, z) \quad (1.33)$$

La composante  $\langle \mathbf{v}'_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{v}'_{\perp} \rangle$  peut être négligée dans l'équation 1.6, car sa principale contribution provient de la couche limite de Hartmann, dont l'épaisseur est faible devant l'épaisseur totale  $h$ . Nous avons ainsi

$$\partial_t \langle \mathbf{v}_{\perp} \rangle + \langle \mathbf{v}_{\perp} \rangle \cdot \nabla_{\perp} \langle \mathbf{v}_{\perp} \rangle + \frac{1}{\rho} \nabla_{\perp} \langle \pi \rangle - \nu \Delta_{\perp} \langle \mathbf{v}_{\perp} \rangle = \langle \nu \partial_{zz} \mathbf{v}_{\perp} \rangle + \frac{1}{\rho} \langle \mathbf{j} \times \mathbf{B}_0 \rangle \quad (1.34)$$

Il reste à détailler les termes du membre de droite de l'équation 1.30. Le premier terme est à l'origine d'une dissipation par friction linéaire, assimilable à une perte de charge régulière. Le second terme permet de créer un forçage grâce à l'injection de courant par la paroi inférieure.



### 1.5.2 La friction par la couche de Hartmann

L'intégration dans la direction  $z$  du premier terme du membre de gauche donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_0^h [\nu \partial_{zz} \mathbf{v}_\perp] dz &= \frac{1}{h} \nu [\partial_z \mathbf{v}_\perp]_0^h \\ &= -\frac{\nu}{h} \partial_z \mathbf{v}_\perp(z=0) \end{aligned} \quad (1.35)$$

La surface supérieure étant libre, le gradient de  $\mathbf{v}_\perp$  est localisé à proximité de la paroi inférieure. En supposant l'épaisseur  $\delta_H$  de la couche limite très petite, on peut poser

$$\partial_z \mathbf{v}_\perp(z=0) \simeq \frac{\langle \mathbf{v}_\perp \rangle}{\delta_H} \quad (1.36)$$

Finalement, l'intégration du Laplacien fait apparaître un terme de friction linéaire

$$\frac{1}{h} \int_0^h [\nu \partial_{zz} \mathbf{v}_\perp] dz = -\frac{\langle \mathbf{v}_\perp \rangle}{\tau_H} \quad (1.37)$$

avec  $\tau_H$  le temps de dissipation par friction, tel que

$$\tau_H = \frac{h \delta_H}{\nu} = \frac{h}{B_0} \sqrt{\frac{\rho}{\nu \sigma}} \quad (1.38)$$

Ainsi les effets tridimensionnels de l'écoulement dus aux couches limites proche de la paroi inférieure sont pris en compte dans l'équation de Navier-Stokes 2D par un terme de friction linéaire.

### 1.5.3 Le forçage électromagnétique

Il est possible d'entraîner le fluide en mouvement grâce à l'injection de courants verticaux par le fond de la cellule. Ces courants forcent un écoulement rotationnel. Pour le montrer, nous allons calculer le rotationnel de la force Laplace, qui vaut

$$\nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}_0) = B_0 \partial_z \mathbf{j} - \mathbf{j} \cdot \nabla \mathbf{B}_0 \quad (1.39)$$

Le champ  $\mathbf{B}_0$  étant uniforme, seul le premier terme est non-nul. L'intégration du rotationnel dans la direction  $z$  donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_0^h \nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}_0) \cdot \mathbf{e}_z dz &= \frac{1}{h} \int_0^h B_0 \partial_z j_z dz \\ &= B_0 \frac{1}{h} [j_z]_0^h \end{aligned} \quad (1.40)$$

Ainsi, la force de Laplace est irrotationnelle lorsque les surfaces supérieures et inférieures sont isolantes. Dans le cas contraire, la force de Laplace entraîne en rotation le fluide juste au dessus du point d'injection du courant  $j_z$ . Nous montrerons dans le chapitre suivant les détails expérimentaux de l'injection de courant par la surface inférieure.

### 1.5.4 Conclusion

Finalement, nous avons montré que les équations de la magnétohydrodynamique se réduisent à l'équation de Navier-Stokes bidimensionnelle donnée par

$$\partial_t \langle \mathbf{v}_\perp \rangle + \langle \mathbf{v}_\perp \rangle \cdot \nabla_\perp \langle \mathbf{v}_\perp \rangle = -\frac{1}{\rho} \nabla_\perp \langle \pi_\perp \rangle + \nu \Delta_\perp \langle \mathbf{v}_\perp \rangle - \frac{1}{\tau_H} \langle \mathbf{v}_\perp \rangle + \mathbf{f} \quad (1.41)$$

avec  $\tau_H$  le temps associé à la friction par la couche limite de Hartmann et  $\mathbf{f}$  le forçage. Cette simplification est possible lorsque le nombre de Reynolds magnétique  $Rm$ , le paramètre d'interaction  $N$ , le nombre de Hartmann  $Ha$  et nombre de lundquist  $Lu$  sont tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} Rm = \frac{VL}{\eta} \ll 1 & N = \frac{\sigma B_0^2 L}{V\rho} \gg 1 \\ Lu = B_0 h \sigma \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} \ll 1 & Ha = h B_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} \gg 1 \end{array} \right. \quad (1.42)$$

En pratique, le nombre  $Rm$  est très faible si le nombre de Prandtl magnétique  $Pm$  est très petit, ce qui est le cas pour les métaux liquides ( $Pm \simeq 10^{-6}$ ), car le nombre de Reynolds  $Re$  ne dépasse pas  $10^5$ .

De plus, on remarque que l'augmentation du champ magnétique  $B_0$  à des effets antagonistes en augmentant les nombres de Lundquist  $Lu$  et de Hartmann  $Ha$ . L'accroissement de  $Lu$  favorise l'émergence d'ondes d'Alfvén et donc de perturbations dans la direction verticale, alors que la hausse du nombre  $Ha$  permet de localiser les couches limites due aux parois. On remarque cependant que le nombre de Hartmann peut se mettre sous la forme

$$Ha = Lu Pm^{-1/2} \quad (1.43)$$

Les limites  $Ha \gg 1$  et  $Lu \ll 1$  sont compatibles si là encore le Prandtl magnétique  $Pm$  est très faible devant.

Nous pouvons aussi exprimer le paramètre d'interaction  $N$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re$ , du nombre de Hartmann  $Ha$  et du rapport d'aspect  $h/L$

$$N = \frac{Ha^2}{Re} \left( \frac{L}{h} \right)^2 \quad (1.44)$$

Le paramètre d'interaction  $N$  est grand si le nombre de Hartmann et le rapport d'aspect  $h/L$  sont tels que

$$\left[ Ha \left( \frac{L}{h} \right) \right]^2 \gg Re \quad (1.45)$$

Ainsi si le nombre de Reynolds est a priori inconnu, nous optimisons la bidimensionnalité de l'écoulement si

$$\frac{h}{L} \ll 1 \quad \text{et} \quad Pm^{-1/2} \gg Ha \gg 1 \quad . \quad (1.46)$$

Dans la suite, nous poserons  $\langle \mathbf{v}_\perp \rangle = \mathbf{v}$  en considérant le champs de vitesse  $\mathbf{v}$ , uniquement dans la direction transverse au champ magnétique et uniforme dans la direction  $z$ .

## 1.6 Physique des écoulements bidimensionnels

### 1.6.1 Les équations

#### L'équation de Navier-Stokes

Nous venons de montrer que la dynamique de l'écoulement dans le plan  $x0y$  était décrite par l'équation de Navier-Stokes (N-S) incompressible, comportant un terme de friction et un terme de forçage  $\mathbf{f}$

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \pi + \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\tau_H} \mathbf{v} + \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad (1.47)$$

Le régime de l'écoulement est généralement régi par la compétition entre les effets inertiels et visqueux, dont le rapport est donné par le nombre de Reynolds  $Re$ , défini par

$$Re = \frac{[v \cdot \nabla v]}{[\nu \Delta v]} = \frac{VL}{\nu} \quad (1.48)$$

avec  $V$  et  $L$ , respectivement une vitesse et une longueur caractéristiques du problème considéré. On peut aussi construire un nombre sans dimension lié à la dissipation par friction

$$Rh = \frac{[v \cdot \nabla v]}{[(\tau_H^{-1})v]} = \frac{\tau_H V}{L} \quad (1.49)$$

#### Équation de la vortacité

La vortacité  $\omega$  joue un rôle particulier dans les écoulements 2D car elle devient un simple scalaire défini par  $\omega_z = \partial_x v_y - \partial_y v_x$ , et dont l'évolution est donnée par

$$\partial_t \omega_z + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega_z = \nu \Delta \omega_z - \frac{1}{\tau_H} \omega_z + (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{e}_z \quad (1.50)$$

#### La fonction de courant $\psi$

L'écoulement étant bidimensionnel et incompressible, il est possible de définir une fonction de courant, telle que

$$v_x = \partial_y \psi \quad \text{et} \quad v_y = -\partial_x \psi \quad (1.51)$$

Par définition, le champ de vitesse est tangent aux lignes de courant, données par les iso-valeurs de  $\psi$ . La vortacité  $\omega$  est alors égale à  $\omega = (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_z = -\Delta \psi$ . À partir de l'équation 1.50 de la vortacité, on en déduit l'équation de  $\psi$

$$\partial_t \Delta \psi + \frac{\partial (\Delta \psi, \psi)}{\partial (x, y)} = \nu \Delta^2 \psi + \nabla \times \mathbf{f} - \frac{1}{\tau_H} \Delta \psi \quad (1.52)$$

Où  $\partial(a, b)/\partial(x, y) = \partial_x a \partial_y b - \partial_x b \partial_y a$ , est le Jacobien.

### 1.6.2 Turbulence 2D

Dans cette section, nous allons décrire les propriétés des écoulements turbulents lorsque  $Re, Rh \gg 1$ .

#### Turbulence et cascade

L'état turbulent est caractérisé par la présence de nombreuses structures tourbillonnaires sur une large gamme d'échelles spatiales et temporelles (figure 1.5). Ce chaos spatio-temporel est engendré par les interactions non-linéaires entre les différentes structures tourbillonnaires, permises par le terme  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  de l'équation de Navier-Stokes.

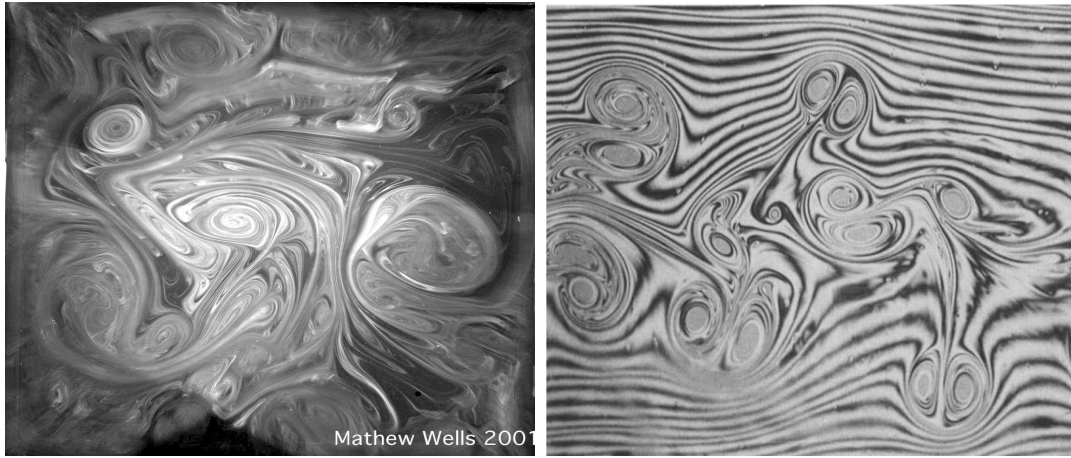


FIGURE 1.5 – Gauche : turbulence 2D en rotation et en déclin extrait de [65]. Droite : dynamique tourbillonnaire chaotique dans un film de savon [10].

Pour maintenir la turbulence dans les systèmes dissipatifs, l'énergie doit nécessairement être continuellement injectée. S'il existe une séparation d'échelle entre les échelles spatiales d'injection et de dissipation d'énergie, l'énergie injectée est transférée sur toute une gamme d'échelles spatiales sans être dissipée : c'est le phénomène de cascade. Cette cascade est souvent caractérisée par une propriété d'auto-similarité sur cette gamme dite "inertielle".

Les cascades sont donc associées aux propriétés de conservation de certaines grandeurs (énergie, enstrophie ou hélicité) entre l'échelle d'injection et de dissipation. Dans le cas des écoulements 3D, ce transfert d'énergie s'illustre par le mécanisme de cascade de Richardson, où l'énergie est transférée vers les échelles de plus en plus petites pour être finalement dissipée par les effets visqueux.

Pour les écoulements bidimensionnels, l'énergie  $v^2$  ainsi que l'enstrophie  $\omega^2$  sont conservées sur les gammes inertielles. Cette dernière propriété, propre aux écoulements 2D, est due à l'orthogonalité du champ de vitesse avec le champ de vortacité. Ainsi pour des nombres de Reynolds importants, selon la théorie de Kraichnan-Batchelor-Leith (KBL) [3, 34, 36] il existe respectivement deux gammes inertielles, une pour l'énergie et une pour l'enstrophie, où ces grandeurs sont transférées à travers les différentes échelles de l'écoulement, jusqu'aux échelles de dissipation.

## Argumentation de Fjørtoft

Afin d'évaluer le sens de ces transferts, c'est-à-dire savoir si l'énergie est transférée préférentiellement vers les grandes ou les petites échelles, on utilise fréquemment l'argumentation de Fjørtoft[20].

Considérons trois modes de Fourier dont les vecteurs d'onde sont  $\vec{p}$ ,  $\vec{k}$  et  $\vec{q}$ . Le terme inertiel des équations de N-S étant quadratique, l'énergie est transférée via des interactions à trois modes. Pour que ces modes interagissent, il faut qu'ils vérifient l'égalité vectorielle suivante,  $\vec{k} + \vec{p} + \vec{q} = 0$ .

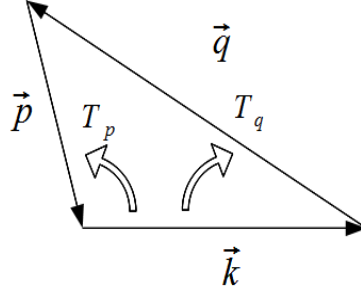


FIGURE 1.6 – Schéma de l'interaction triadique en turbulence 2D.

Soit  $E_k = v_k^2$  et  $Z_k = w_k^2 = k^2 v_k^2$ , l'énergie et l'enstrophie contenues dans le mode de Fourier  $\vec{k}$ . On pose  $T_k$ , le transfert d'énergie des vecteurs d'onde  $p$  et  $q$  vers  $k$ . En négligeant la viscosité, le bilan d'énergie et d'enstrophie pour le mode  $k$  est alors

$$\partial_t E_k = T_k \quad \text{et} \quad \partial_t Z_k = k^2 T_k \quad (1.53)$$

Ainsi, la conservation de l'énergie et de l'enstrophie entre les trois modes impose

$$\begin{cases} T_k + T_q + T_p = 0 \\ k^2 T_k + q^2 T_q + p^2 T_p = 0 \end{cases} \quad (1.54)$$

Par substitution, on montre que

$$T_p = \frac{k^2 - q^2}{q^2 - p^2} T_k \quad T_q = \frac{p^2 - k^2}{q^2 - p^2} T_k \quad (1.55)$$

On remarque que si on impose la hiérarchie :  $p < k < q$ , le transfert d'énergie  $T_k$  est de signe opposé à  $T_q$  et  $T_p$ . On a alors un transfert d'énergie à la fois vers des longueurs d'onde plus petites ( $q > k$ ) et aussi plus grande ( $p < k$ )

On a donc deux cascades, une vers les grandes échelles et une vers les petites échelles. De plus, si on pose  $p = k/\lambda$  et  $q = \lambda k$  où  $\lambda > 1$ , on obtient

$$T_p = \lambda^2 \frac{1 - \lambda^2}{\lambda^4 - 1} T_k \quad T_q = \frac{1 - \lambda^2}{\lambda^4 - 1} T_k \quad (1.56)$$

Ainsi

$$\frac{T_p}{T_q} = \lambda^2 \quad \text{et} \quad \frac{p^2 T_p}{q^2 T_q} = \frac{1}{\lambda^2} \quad (1.57)$$

Si  $T_k$  est positif, l'énergie est transférée préférentiellement vers les grandes longueurs d'onde car  $T_p/T_q > 1$ , alors que l'enstrophie est transférée préférentiellement vers les petites longueurs d'ondes car  $(p^2 T_p)/(q^2 T_q) \leq 1$ . On a alors un phénomène de cascade directe d'enstrophie des grandes aux petites échelles et une cascade inverse d'énergie des petites aux grandes échelles.

Bien que donnant une intuition sur l'origine de la cascade inverse, l'argumentation de Fjørtoft ne constitue pas une preuve formelle pour le sens des cascades [44]. Des preuves plus générales peuvent être trouvées dans la revue de Gkioulekas et Tung [27]

### Spectres de la cascade inverse et directe

Nous allons déduire par analyse dimensionnelle les exposants des spectres de Fourier spatiaux des deux cascades, dans le cadre d'une turbulence homogène et isotrope. On suppose alors que

- l'énergie injectée  $\epsilon$  et l'enstrophie injectée  $\epsilon_\omega$  sont conservées dans leur gamme inertielle respective et sont indépendantes des processus de dissipation.
- Les interactions sont locales, c'est-à-dire que les structures tourbillonnaires échangent de l'énergie entre des structures de même taille.

Grâce à ces hypothèses, la puissance injectée  $\epsilon$  est transférée à travers les différentes échelles  $l$  dans la gamme inertielle. La puissance transférée par les termes non-linéaires des structures de taille  $l$  et d'amplitude  $u_l$  dans la cascade d'énergie vaut  $\epsilon$ , et s'estime par

$$\frac{u_l^3}{l} \sim \epsilon \quad \text{ainsi} \quad u_l^2 \sim \epsilon^{2/3} l^{2/3} \quad (1.58)$$

avec  $u_l^2$  l'énergie contenue dans les structures de taille  $l$ . Cette analyse dimensionnelle permet de prédire la dépendance de la fonction de structure en  $r$ , telle que

$$\langle \Delta u^2(r) \rangle \sim \epsilon^{2/3} r^{2/3} \quad (1.59)$$

Le spectre de la cascade inverse est alors

$$E(k) = C \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (1.60)$$

avec  $C$  la constante de Kolmogorov. Quant à la cascade directe, l'analyse dimensionnelle prédit un spectre en

$$E(k) = C_\omega \epsilon_\omega^{2/3} k^{-3} \quad (1.61)$$

Avec  $\epsilon_\omega$  l'injection d'enstrophie dans le système. La pente de la cascade directe est donc bien plus forte en 2D et les petites échelles contiennent très peu d'énergie. La densité spectrale d'entrophie se déduit des spectres d'énergie en les multipliant par  $k^2$

$$Z(k) = C' \epsilon^{2/3} k^{1/3} \quad \text{et} \quad Z(k) = C'_\omega \epsilon_\omega^{2/3} k^{-1} \quad (1.62)$$

Dans ce cas, la vorticité est principalement localisée proche des échelles d'injection. Ces différents spectres sont schématisés sur la figure 1.7.

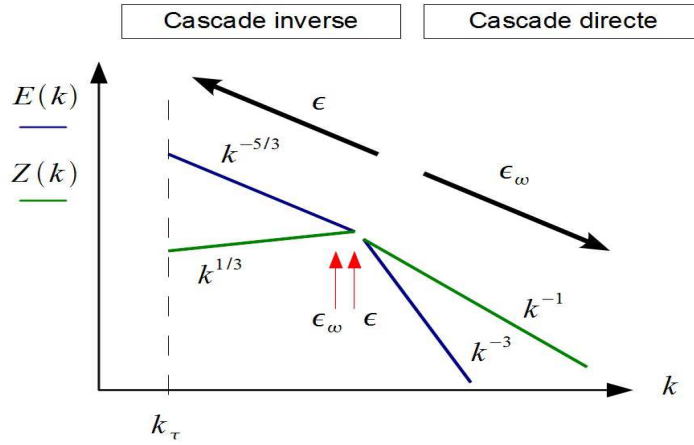


FIGURE 1.7 – Schéma représentant les deux cascades. La densité d'énergie  $E(k)$  est tracée en bleu et la densité d'enstrophie  $Z(k)$  en vert. La cascade inverse d'énergie et la cascade directe d'enstrophie, sont séparées par l'échelle d'injection illustrée par la flèche rouge.

### Phénoménologie de la cascade inverse

En turbulence 3D, l'énergie est transférée vers les petites échelles grâce à l'étirement vorticity du au terme  $\omega \cdot \nabla \mathbf{u}$ . Or ce terme est nul lorsque l'écoulement est bidimensionnel, expliquant en partie le fait que l'énergie n'est pas transférée préférentiellement vers les petites échelles.

En turbulence en déclin, c'est-à-dire sans forçage, le mécanisme physique de la cascade semble être l'appariement et la fusion de vortex de même signe. Pour la turbulence forcée, il n'existe pas de consensus sur le mécanisme de formation des grandes échelles. Contrairement à la turbulence en déclin qui relaxe vers un équilibre où l'énergie est nulle, en turbulence forcée, l'énergie est continuellement injectée dans le système, ce qui semble en partie inhiber le mécanisme de fusion. Plusieurs études [12, 59] mentionnent la structuration de l'écoulement en agrégats de tourbillons entourés d'une circulation grande échelle, dont l'amplitude  $\Gamma$  est donnée par

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \iint \omega dS \quad (1.63)$$

D'après ces auteurs, l'agrégat de tourbillons permet le transfert d'énergie des petites échelles vers les grandes échelles. Un formalisme introduit par Eyink [18] et s'inspirant du modèle de viscosité négative locale introduite par Kraichnan [35], semble bien décrire ces interactions entre circulation grande échelle et vorticity petite échelle [67].

### 1.6.3 La condensation

A l'instar de l'échelle de Kolmogorov visqueuse  $l_\nu$ , on peut construire par argument dimensionnel une échelle de dissipation par friction  $l_\tau$ . Elle correspond à l'échelle où la majeure partie de l'énergie est dissipée et où la cascade inverse s'arrête. Par analyse dimensionnelle, on montre que l'échelle  $l_\tau$  varie comme



$$l_\tau = \sqrt{\epsilon \tau_H^3} \quad (1.64)$$

Ainsi la cascade inverse développe des échelles de plus en plus grande, lorsque l'énergie injectée augmente pour  $\tau_H$  constant. Sur la figure 1.7, la fin de la cascade inverse est illustrée par la droite hachurée correspondant au vecteur d'onde  $k_\tau = 2\pi/l_\tau$ .

Or pour tout domaine réaliste de taille finie, la cascade inverse vers les grandes échelles est bornée par la taille du domaine  $L$ . Ainsi lorsque  $l_\tau$  est de l'ordre de  $L$ , il apparaît un phénomène d'accumulation d'énergie dans les structures à l'échelle du domaine. Ce phénomène est illustré sur la figure 1.8, où le vecteur d'onde  $k_\tau$  est de l'ordre de  $k_L = (2\pi)/L$ .

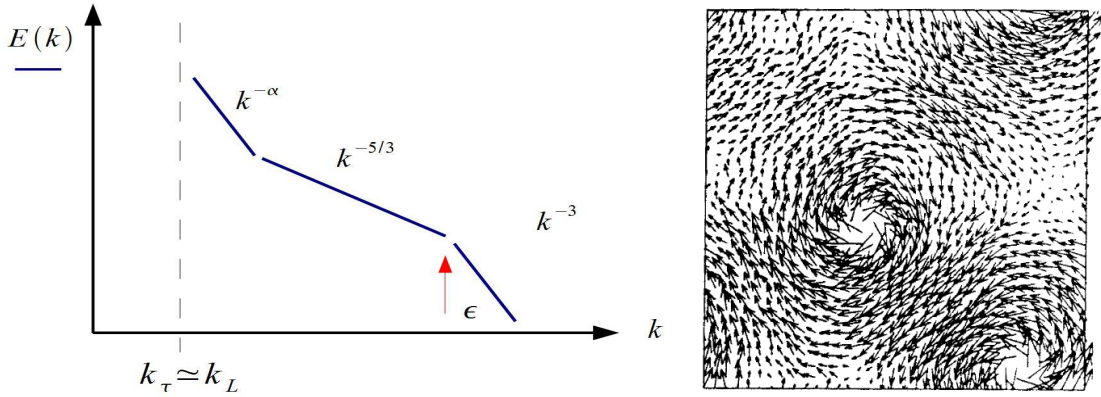


FIGURE 1.8 – Gauche : illustration du phénomène de condensation. Lorsque  $k_\tau$  l'échelle de dissipation est du même ordre que l'échelle du domaine  $k_L$ , l'énergie s'accumule aux faibles  $k$ . Droite : champ de vitesse dans l'état condensé, extrait de [55].

Ce mécanisme, prédit par Kraichnan [34], a été observé de nombreuses fois [49, 33, 55, 56]. Cet état est communément nommé état condensé, en référence au phénomène de condensation de Bose-Einstein.

Généralement, ce phénomène est associé à la présence d'un ou deux tourbillons intenses dominant l'écoulement à l'échelle de la cellule (figure 1.8 de droite). La présence de ces vortex change l'allure du spectre, qui suit une loi de puissance en  $k^{-\alpha}$  avec  $\alpha \in [2, 3]$ , pour  $k$  proche de  $k_L$ . L'exposant de ce spectre s'explique par la présence de vorticité aux grandes échelles. Le spectre d'entrophie doit donc augmenter vers les faibles longueurs d'onde, soit  $Z(k) \sim k^{-\gamma}$  avec  $\gamma > 0$ . Comme  $Z(k) = k^2 E(k)$ , on a  $E(k) \sim k^{-(\gamma+2)}$ . Ainsi si  $\gamma$  est positif, l'exposant du spectre de l'énergie est nécessairement inférieur à  $-2$ .

## 1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que les écoulements de métaux liquides soumis à un champ magnétique intense pouvaient être décrits par l'équation de Navier-Stokes 2D. Nous avons présenté les différents mécanismes assurant la bidimensionnalité de l'écoulement. L'écoulement peut aussi être for  en volume grâce aux forces de Laplace, engendrées par l'injection de courant par la paroi inférieure.

Cette configuration, où il est possible de forcer en volume tout en assurant la bi-dimensionnalité de l'écoulement, nous permet d'étudier les propriétés des écoulements 2D dans un cadre privilégié.

Ces écoulements 2D ont la particularité de former des structures à grande échelle, grâce à la présence d'une cascade inverse d'énergie, qui coexistent avec une turbulence à petite échelle, due à la cascade directe. Ce contexte est donc favorable à l'observation de transitions et bifurcations de structures cohérentes émergeant d'un fond turbulent.



# Chapitre 2

## Description de l'expérience

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Descriptif du montage</b>	<b>25</b>
2.1.1	Le choix du montage	25
2.1.2	Le galinstan et ses propriétés physico-chimiques	25
2.1.3	Le montage expérimental	27
2.1.4	Le forçage électromagnétique	28
2.1.5	Les symétries du forçage	30
<b>2.2</b>	<b>L'instrumentation</b>	<b>31</b>
2.2.1	Les mesures par les sondes Vives	31
2.2.2	Les mesures par la sonde Doppler acoustique	32
2.2.3	La mesure du champ de vitesse par le suivi de particules	34
<b>2.3</b>	<b>Mesure de la dissipation par friction</b>	<b>38</b>
2.3.1	Motivations	38
2.3.2	Les mesures	38
<b>2.4</b>	<b>Adimensionnement des équations de Navier-Stokes 2D</b>	<b>41</b>
2.4.1	Les nombres sans dimension	41
2.4.2	Les échelles dissipatives	42

---

## 2.1 Descriptif du montage

### 2.1.1 Le choix du montage

Il n'existe pas dans la nature d'écoulements purement bidimensionnels car il subsiste toujours une dépendance tridimensionnelle du champ de vitesse, le plus souvent localisée dans des couches limites. Le but du montage est donc de localiser fortement ces effets 3D (3 composantes) pour obtenir une zone où l'écoulement est majoritairement 2D (2 composantes). Il existe plusieurs méthodes pour obtenir de tels écoulements et nous avons choisi les deux options suivantes :

- en confinant le fluide dans une faible épaisseur  $h$  comparée aux dimensions transverses  $L$ ,
- en imposant un champ magnétique  $\mathbf{B}_0$  intense, uniforme et transverse à l'écoulement d'un fluide conducteur.

Dans le premier cas, le faible rapport  $h/L$  permet de négliger la composante verticale du champ de vitesse par rapport aux composantes transverses. L'écoulement peut alors être décrit par seulement deux composantes du champ de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ . Cependant le champ reste 3D car il dépend toujours des trois coordonnées spatiales. Les écoulements dans les films de savon est un exemple de fort confinement où l'épaisseur est de l'ordre du micro-mètre et les dimensions transverses entre la dizaine de centimètre et le mètre [11]. Dans notre expérience, le confinement sera relativement faible car  $h/L$  est égal à 0.16.

Pour la seconde condition, le mécanisme de bidimensionalisation est décrit dans la section 2.4. L'écoulement devient uniforme dans la direction du champ magnétique, excepté dans la couche limite proche des parois. Le champ magnétique aussi permet de forcer un écoulement au sein du fluide conducteur grâce aux forces de Laplace, dont le principe sera décrit dans cette section. Notre montage reprend en partie le principe du montage de Sommeria [56].

Ainsi, la combinaison de ces deux effets nous permet de créer un écoulement quasi-bidimensionnel. En considérant la direction  $z$  comme la direction du champ magnétique et du confinement, la faible épaisseur permet à l'écoulement d'être dans le plan  $xOy$  (on passe de 3 à 2 composantes) et le champ magnétique uniformise dans la direction  $z$  l'écoulement, qui ne dépend plus que des variables  $x$  et  $y$  (on passe alors de 3D à 2D).

### 2.1.2 Le galinstan et ses propriétés physico-chimiques

Le métal liquide utilisé dans notre expérience est le galinstan [14], alliage eutectique de gallium (68,5%), d'indium (21.5%) et d'étain (10%). Ces principales propriétés sont données dans le tableau 2.1 (à température ambiante  $T = 293K$ ), où elles sont comparées à celles d'autres métaux liquides.

Le choix du fluide s'est effectué selon des critères de simplicité d'utilisation et d'optimisation du processus de bidimensionnalisation. On ne considéra pas le sodium pour des raisons de sécurité <sup>1</sup>, même si on le présente dans le tableau pour comparer.

---

<sup>1</sup>Le sodium liquide est explosif au contact de l'eau et inflammable au contact de l'air

Métal	Gallium	Galinstan	Mercure	Sodium
densité $d$	6.09	6.44	13.54	0.92
température de fusion $T_{fusion}$ [ $^{\circ}C$ ]	29	−19	−38.8	97
conductivité électrique $\sigma \times 10^{-6}$ [ $S.m^{-1}$ ]	3.86	3.46	1.04	10
viscosité dynamique $\mu \times 10^3$ [ $Pa \cdot s$ ]	1.8	2.4	1.52	6.77
viscosité cinématique $\nu \times 10^7$ [ $m^2/s$ ]	3.1	3.72	1.13	7.3
vitesse du son $c$ [ $m/s$ ]	2860	2730	1450	2550
$\sqrt{\sigma/\mu}$ [ $(m \cdot T)^{-1}$ ]	4.63	3.79	2.61	3.84
Prandtl magnétique $P_m \times 10^6$	1.5	1.61	0.145	9.1

TABLE 2.1 – Propriétés physiques du gallium, du galinstan, du mercure et du sodium.

D’après le chapitre 1, la bidimensionnalisation de l’écoulement est caractérisée par les deux nombres sans dimension <sup>2</sup>, le nombre de Prandtl magnétique  $Pm$  et le nombre de Hartmann  $Ha$ , tels que

$$Pm = \mu\sigma\nu \quad \text{et} \quad Ha = hB_0\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}}. \quad (2.1)$$

Le nombre de Prandtl magnétique  $Pm$  doit être très faible pour que le Reynolds magnétique soit très petit devant un. Quant au nombre de Hartmann  $Ha$ , il est le rapport de l’épaisseur du fluide  $h$  sur l’épaisseur  $\delta_H$  de la couche limite de Hartmann. Le nombre  $Ha$  quantifie donc le degré de bidimensionalisation de l’écoulement.

Pour les quatre fluides,  $Pm$  est très faible et le choix du fluide doit donc être fait de telle sorte que  $Ha$  soit le plus grand possible. Le nombre de Hartmann dépend des propriétés du fluide par le facteur  $\sqrt{\sigma/(\rho\nu)}$ . Plus ce rapport est important, plus l’épaisseur des couches limites est faible pour une épaisseur et un champ magnétique constant. Or ce coefficient est 50% plus faible pour le mercure comparé au galinstan et au gallium. Le mercure n’est donc pas le liquide le plus approprié dans notre expérience. De plus, on préférera le galinstan au gallium car sa température de fusion est inférieure à la température ambiante, il est donc liquide dans les conditions usuelles d’utilisation.

Initialement développé pour remplacer le mercure dans les thermomètres médicaux, le galinstan est non-toxique. Au contact de l’air, la surface du galinstan s’oxyde en formant principalement de l’oxyde  $Ga_2O_3$  [14]. La surface semble alors se rigidifier et l’écoulement n’est visible que par les légères déformations de la surface. L’acide dissout cette surface d’oxydes en formant des anions solubles à partir de l’ion Gallium  $Ga^{3+}$ . Dans notre expérience, nous utilisons de l’acide chlorhydrique dont la réaction avec le Gallium donne les anions :  $GaCl_4^-$  et  $Ga_2Cl_7^-$ . La concentration de l’acide est d’environ 5% du pourcentage massique. Cette couche d’acide est changée toutes les deux semaines.

---

<sup>2</sup>sachant que le rapport  $h/l$  est faible

### 2.1.3 Le montage expérimental

#### La cellule

Le galinstan est contenu dans une cellule carrée de PVC de section extérieure 138mm et de hauteur totale 85mm (figure 2.1). L'épaisseur des parois verticales est de 9mm, celle du fond de la cellule vaut 15 mm. Le fluide remplit une section intérieure de largeur  $L = 120$  mm. Le fond de la cellule est percé par huit trous traversant de 8 mm de diamètre et de neuf trous traversant de 1 mm. À chaque extrémité de ces trous, on a effectué un lamage laissant une encoche pour couler une colle <sup>3</sup> permettant l'étanchéité de la cellule. Les trous de 8 mm sont destinés aux électrodes en laiton de 8mm, qui affleurent au fond de la cellule. Les trous de 1 mm sont pour les sondes Vives en inox, qui dépassent de 7.5 mm du fond de la cellule. Cette cellule est remplie au maximum de 2 cm de galinstan, la valeur maximale du rapport  $h/L$  vaut alors 16.6%.

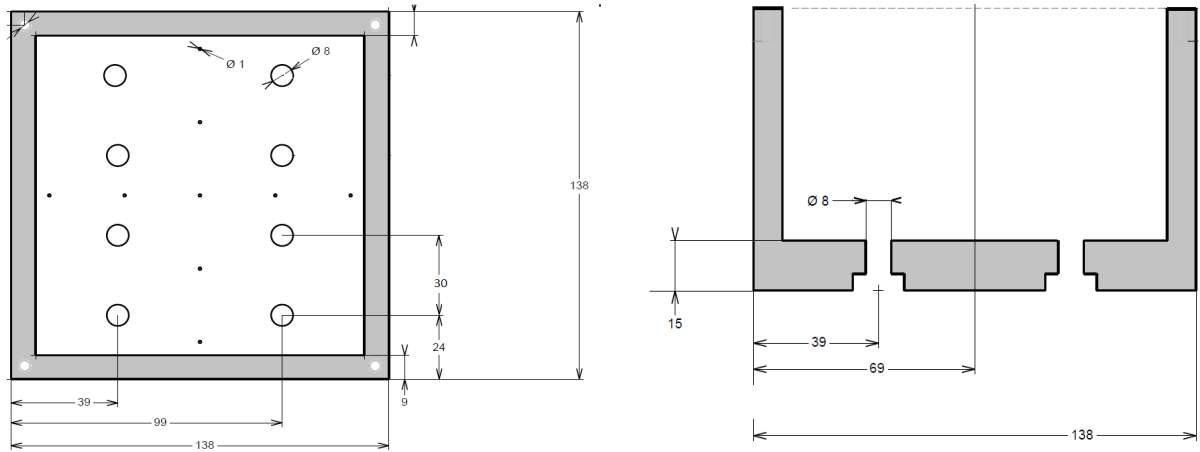


FIGURE 2.1 – Gauche : vue de dessus du schéma de la cellule. Droite : vue en coupe.

#### L'injection du courant

Les électrodes de 8 mm de diamètre permettent l'injection d'un courant continu dans la cellule, grâce aux quatre électrodes positives et aux quatre électrodes négatives. Chacune de ces électrodes est reliée en série à une résistance de  $50m\Omega$ , qui est ensuite connectée à l'alimentation.

Un amalgame se forme entre les électrodes de laiton et le galinstan, créant ainsi une résistance de contact entre le fluide et le laiton de l'ordre du  $m\Omega$ , variant d'une électrode à l'autre. La valeur de la résistance de puissance est choisie de telle sorte que la résistance de contact entre le fluide et l'électrode soit négligeable par rapport à la résistance totale entre l'alimentation et l'électrodes. Le réseau est ainsi équilibré et permet d'injecter la même intensité dans chaque électrode.

L'alimentation est une *Agilent 6690A*, 10 V et 400 A, contrôlée en courant. La polarité des électrodes est alternée spatialement, comme l'indique la figure 2.2, où les électrodes positives sont en bleu et les électrodes négatives en rouge. Ces résistances sont fixées sur une plaque de cuivre, qui est refroidie par un serpentin relié à un bain

<sup>3</sup>La colle utilisée est du stycast

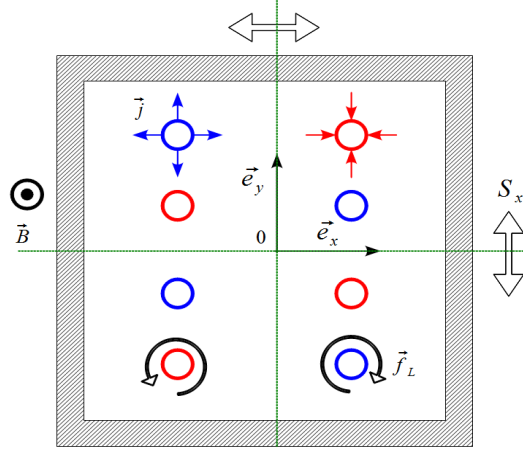


FIGURE 2.2 – Schéma de l'injection du courant dans la cellule.

thermostaté. Le courant total injecté peut monter jusqu'à 200A ce qui correspond à un courant de 50A et une puissance dissipée de 125W par résistance.

Ce montage est analogue à celui de Sommeria [56]. Cependant, notre injection du courant est différente car nos électrodes sont rasantes, plus larges et moins nombreuses ( $2 \times 4$  tourbillons dans notre cas et  $6 \times 6$  pour l'expérience de Sommeria).

### Le champ magnétique

La cellule est placée au centre d'un solénoïde (cf figure 2.3). Cette bobine est alimentée par une alimentation Power-Ten 10V – 1000A. Le champ magnétique  $B_0$  mesuré au centre et à 10mm au-dessus du fond de la cellule varie linéairement avec le courant injecté dans la bobine  $I_b$  tel que

$$B_0 = 1,64 \cdot 10^{-4} \times I_b \quad \text{Tesla.} \quad (2.2)$$

Les variations du champ magnétique sont de l'ordre de 5 – 10% dans la cellule. Le courant  $I_b$  varie de 500 à 750 A et le champ magnétique est alors compris entre 82 et 123 milliTesla, soit 820 et 1230 Gauss <sup>4</sup>. Une circulation d'eau permet le refroidissement de la bobine.

#### 2.1.4 Le forçage électromagnétique

Un des intérêts du métal liquide réside dans la possibilité de forcer un écoulement grâce à la force de Laplace  $\mathbf{j}_\perp \times \mathbf{B}_0$ , engendrée par le champ magnétique  $\mathbf{B}_0$  et les courants  $\mathbf{j}_\perp$  perpendiculaires au champ magnétique<sup>5</sup>. L'équation de conservation de la charge devient alors

$$\nabla_\perp \cdot \mathbf{j}_\perp = -\partial_z j_z. \quad (2.3)$$

<sup>4</sup>Pour donner un ordre de grandeur, le champ magnétique terrestre est de l'ordre de 0.1mT soit un Gauss.

<sup>5</sup>tels que  $\mathbf{j}_\perp \cdot \mathbf{e}_z = 0$ .





FIGURE 2.3 – Photographie du montage. On observe la cellule grise au centre du solénoïde, qui est éclairé. La surface métallique réfléchissante est particulièrement visible. Les câbles rouges d'alimentation de la bobine sont à droite et la circulation d'eau pour le refroidissement de la bobine à gauche.

Ces courants  $\mathbf{j}_\perp$  sont essentiellement localisés dans la couche de Hartmann. Les électrodes injectant un courant  $j_{z0}$  sont considérées comme des sources ou des puits de courants surfaciques  $\mathbf{J}_\perp$  dans la couche de Hartmann d'épaisseur  $\delta_H$  tels que

$$\nabla_\perp \cdot \mathbf{J}_\perp = -[j_z]_0^{\delta_H} \quad \text{avec} \quad \mathbf{J}_\perp = \int_0^{\delta_H} \mathbf{j}_\perp dz. \quad (2.4)$$

L'intégration de l'équation de continuité du courant dans la direction verticale montre que la divergence de  $\mathbf{J}_\perp$  est non-nulle juste au dessus des électrodes. La densité de courant  $\mathbf{J}_\perp$  peut alors être considérée comme radiale proche de chaque électrode. La force de Laplace  $\mathbf{f}$  intégrée sur l'épaisseur du fluide  $h$  pour un champ magnétique appliqué uniforme  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ <sup>6</sup> vaut ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^h [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] dz &= \left( \int_0^h \mathbf{j}_\perp dz \right) \times \mathbf{B} \\ &= \left( \int_0^{\delta_H} \mathbf{j}_\perp dz \right) \times \mathbf{B} \\ &= \mathbf{J}_\perp \times \mathbf{B} \\ &= -J_\perp B_0 \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (2.5)$$

Le fluide subit une force azimuthale à proximité des électrodes et le sens de rotation dépendra de la polarité de l'électrode (cf figure 2.2).

Cependant cet argument ne nous renseigne que sur le forçage proche des électrodes. Nous allons voir que le rotationnel du forçage  $\nabla \times \mathbf{f}$  dans la direction  $\mathbf{e}_z$  peut être défini dans tout le domaine. On peut ainsi développer le rotationnel de la force de Laplace

$$[\nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B})] \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{B} \cdot \nabla j_z - \mathbf{j} \cdot \nabla B_z. \quad (2.6)$$

<sup>6</sup>On négligera le champ magnétique induit  $b_I$  qui est de l'ordre de  $b_I \approx Rm B_0$ , avec  $Rm \simeq 10^{-2}$ .

Le champ magnétique étant presque homogène, le second terme est négligeable. En moyennant sur l'épaisseur  $h$  du fluide, le rotationnel du forçage devient

$$\begin{aligned} \int_0^h [\nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{e}_z] dz &= B_0 \int_0^h \partial_z j_z dz \\ &= -B_0 j_{0z} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Le rotationnel du forçage est proportionnel à la densité de courant injectée  $j_{0z}$  dans la cellule. La vorticité est seulement injectée au-dessus des électrodes, le forçage est irrotationnel dans le reste du fluide ( $\nabla \times \mathbf{f} = 0$ ).

De plus, la vorticité injectée n'est théoriquement pas affectée par la répartition des courants dans la cellule ou par la présence de courant induit. En effet, le calcul ci-dessus montre que seuls les courants verticaux à travers le fond cellule et la paroi supérieur comptent.

### 2.1.5 Les symétries du forçage

On considère le centre de la cellule comme le centre du repère  $x0y$ , les directions  $e_x$  et  $e_y$  sont données sur la figure 2.2. On définit les transformations  $S_x$  et  $S_y$ , comme les réflexions selon les axes  $0x$  et  $0y$ . Nous allons montrer que le forçage est invariant selon les transformations  $S_x$  et  $S_y$ .

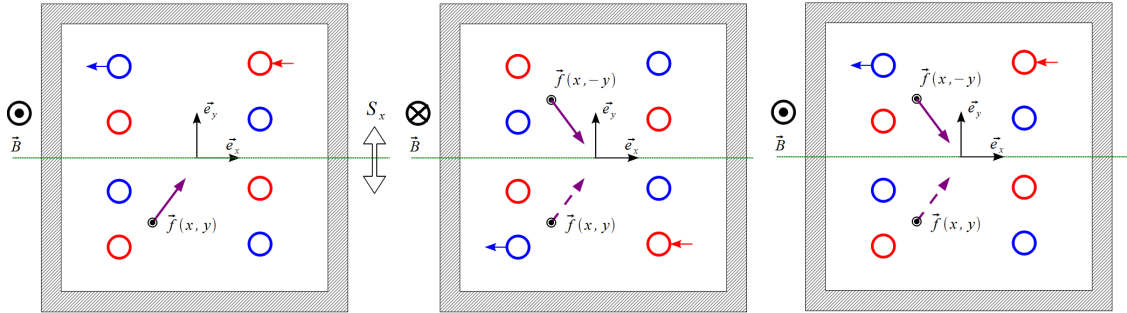


FIGURE 2.4 – Schéma montrant que le forçage est symétrique par rapport à  $0x$ . La figure de gauche est la configuration initiale. On applique alors la symétrie de réflexion  $S_x$  qui change le signe de  $j_{z0}$  et  $B_0$ , comme l'indique la figure du milieu. Puis on change seulement le signe de ces deux grandeurs, qui laissent invariant le forçage, pour revenir à la configuration initiale (cf figure de droite).

Commençons par la symétrie selon  $0x$ . Le développement est illustré sur la figure 2.4, et se décompose en deux étapes. On applique la transformation  $S_x$  sur le système initial (cf figure 2.4 de gauche), on a alors le changement suivant pour le courant  $j_{z0}$ , le champ magnétique  $\mathbf{B}_0$  appliqué et le forçage  $\mathbf{f}$

$$j_{z0}(x, y) \xrightarrow{S_x} j_{z0}(x, -y) = -j_{z0}(x, y)$$

$$\mathbf{B}_0 \xrightarrow{S_x} -\mathbf{B}_0$$
(2.8)

$$\begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} \xrightarrow{S_x} \begin{pmatrix} f_x(x, -y) \\ -f_y(x, -y) \end{pmatrix}$$

Le résultat de la transformation est illustré sur la figure du milieu. Les deux premières grandeurs changent de signe car  $j_{z0}$  est anti-symétrique par rapport à  $0x$  et le champ magnétique est un pseudo-vecteur.

Or le forçage est invariant si  $j_{z0}$  et  $\mathbf{B}_0$  changent tous les deux de signe car leur produit reste de même signe

$$\mathbf{f}(x, y) \longrightarrow \mathbf{f}(x, y) = (-\mathbf{j}) \times (-\mathbf{B})$$
(2.9)

On applique alors une seconde transformation telle que  $(j_{z0}, \mathbf{B}) \rightarrow (-j_{z0}, -\mathbf{B})$  pour retrouver la configuration initiale tout en laissant le forçage invariant. L'application successive de la réflexion  $S_x$  et du changement de signe de  $j_{z0}$  et  $B_0$ , ramène le système à la configuration initiale (cf figure de droite) et montre que le forçage est symétrique selon l'axe  $0x$ , soit

$$\begin{cases} f_x(x, y) &= f_x(x, -y) \\ f_y(x, y) &= -f_y(x, -y) \end{cases}$$
(2.10)

La même argumentation montre que  $\mathbf{f}$  est aussi symétrique par rapport à  $0y$

## 2.2 L'instrumentation

### 2.2.1 Les mesures par les sondes Vives

Les sondes Vives mesurent la tension électrique entre deux électrodes de 1 mm de diamètre décrites dans la section précédente. Les électrodes sont situées le long des axes d'anti-symétrie de l'injection du courant, c'est à dire sur l'axe  $0x$  et  $0y$ . Le champ électrique  $\mathbf{E}_0$  associé à ces courants est donc perpendiculaire aux axes et la tension mesurée ne dépend donc pas du courant injecté. L'électrode centrale est le potentiel de référence  $V_0$  et les autres électrodes sont numérotés de 1 à 8 comme l'illustre la figure 2.5 de gauche.

Comme ces sondes ont une impédance supposée infinie <sup>7</sup> et que la composante  $\mathbf{E}$  mesurée est indépendante de l'injection du courant, la loi d'Ohm généralisée s'écrit alors sur les axes  $0x$  et  $0y$  :

---

<sup>7</sup>En réalité, la résistance d'entrée d'un voltmètre est de l'ordre du  $k\Omega$ .

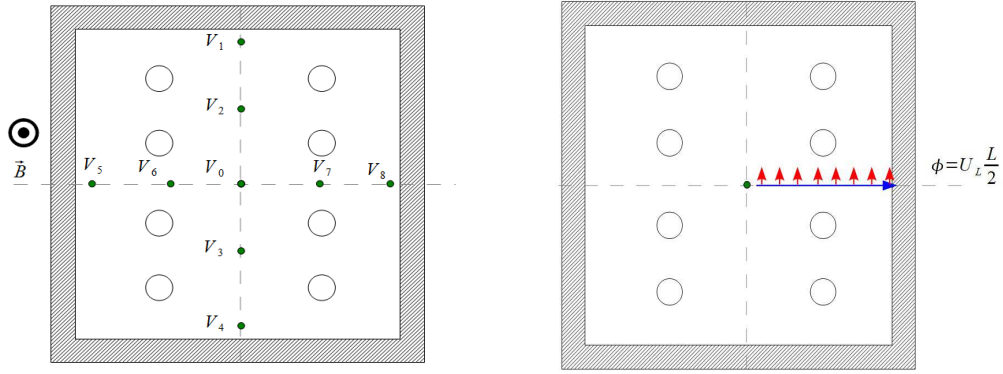


FIGURE 2.5 – Gauche : Schéma montrant la position et les indices des électrodes. Droite : mesure du flux  $\phi$  entre le centre et le bord de la cellule.

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad \text{avec} \quad \mathbf{E} = -\nabla V - \partial_t \mathbf{A}. \quad (2.11)$$

L'équation de droite est associée à l'équation de Faraday où apparaissent les deux potentiels : le potentiel électrique  $V$  et le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ . La tension  $\Delta V$  entre l'électrode du centre et celle située à une distance  $l$  est alors

$$\Delta V = B_0 \int_0^l u_j dl - \int_0^l \partial_t A_i dl, \quad (2.12)$$

avec  $i$  la composante colinéaire au segment entre les deux sondes et  $j$  la composante perpendiculaire. Dans la limite Reynolds magnétique très petit devant un, on montre que le terme  $\partial_t A$  est négligeable car le champ magnétique suit adiabatiquement le champ de vitesse (cf chapitre 1). La principale contribution à la différence de potentiel  $\Delta V$  est donc la force électromotrice  $\int_0^l u_j B_0 dl$ .

$$\Delta V = B_0 \int_0^l u_j dl = B_0 \phi, \quad (2.13)$$

avec  $\phi$  le débit entre les électrodes. En supposant la vitesse moyenne de l'ordre de  $10^{-2} m/s$ , la distance de  $10^{-1} m$  et le champ de  $0.1 T$ , on obtient une tension de l'ordre de  $0.1 mV$ . Les tensions  $V_1$ ,  $V_4$ ,  $V_5$  et  $V_8$  sont théoriquement<sup>8</sup> identiques, du fait de la conservation du débit. On nommera  $\phi_L$  le flux entre le centre et le bord de la cellule (cf figure 2.5 de gauche) et  $U_L$  la vitesse moyenne telle que  $U_L = \phi_L / (L/2)$ , mesurées par les sondes  $V_1$ ,  $V_4$ ,  $V_5$  et  $V_8$ .

La tension est mesurée par un multimètre Integra Series systems (2700) de *Keithley*.

## 2.2.2 Les mesures par la sonde Doppler acoustique

Les mesures par effet Doppler sont des mesures ultra-sonores de la vitesse. Nous utilisons le vélocimètre Doppler ultrasonore DOP3010 de la compagnie *Signal Processing*, associé à un transducteur émetteur et récepteur de fréquence  $f_e = 4$  MHz ayant un diamètre de 5 mm.

<sup>8</sup>la présence de bruit sur la mesure différentielle légèrement la tension mesurée

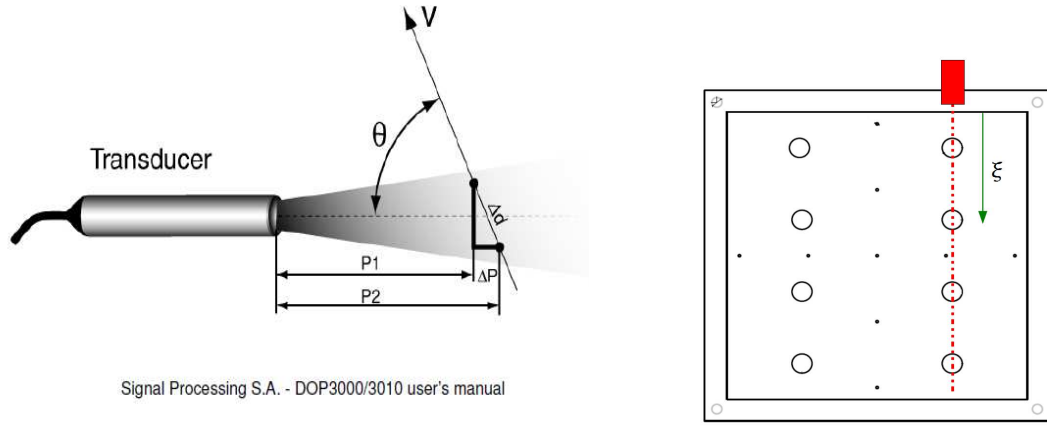


FIGURE 2.6 – Gauche : schéma de la sonde Doppler. Droite : position de la sonde Doppler dans la cellule.

L'appellation Doppler ne réfère pas ici à une mesure du changement de la fréquence de l'écho mais du changement de sa phase. Le principe de la mesure repose sur la détermination de la différence de phase entre deux échos <sup>9</sup>, liée à la distance parcourue.

Le transducteur émet périodiquement avec une période  $T_{PRF}$  <sup>10</sup>, des impulsions acoustiques avec  $f_e$  la fréquence de l'onde porteuse. Considérons qu'une particule se soit déplacée du point  $P_1$  au point  $P_2$  entre deux impulsions (cf figure 2.2.2). À ces deux distances sont associées les temps  $T_1$  et  $T_2$  qui sont les temps entre l'émission et la réception de l'écho pour chaque impulsion. On a alors

$$P_1 - P_2 = \frac{c}{2} \cdot (T_1 - T_2) = u_{dop} T_{PRF}, \quad (2.14)$$

où  $u_{dop}$  est la composante colinéaire de la vitesse. Comme  $T_1 - T_2$  est très faible, de l'ordre de la microseconde, la différence de ces temps est mesurée grâce au décalage  $\delta$  de la phase. On a ainsi

$$\delta = 2\pi \cdot f_e \cdot (T_1 - T_2) \Rightarrow u_{dop} = \frac{c\delta}{4\pi f_e T_{PRF}}. \quad (2.15)$$

De plus la mesure de vitesse est localisée par la distance  $\xi$  entre la sonde et la particule, grâce aux temps de vol  $\xi = cT_1/2$  (aussi égale à  $P_1$ ). On obtient alors un profil  $u_{dop}(\xi)$  où la vitesse est mesurée pour chaque point  $\xi$ .

Il existe une zone dite de Fresnel ou de champ proche, où l'intensité du faisceau acoustique varie rapidement dans l'espace. Dans cette zone, l'onde acoustique ne peut être considérée comme une onde plane, ce qui fausse la mesure Doppler. Cette zone est située entre le transducteur et la distance  $d^2 f_e / (4c)$ , où  $d$  est le diamètre du transducteur. Dans notre expérience, ce champ proche est de 9mm, mais en pratique, la qualité du signal est faible sur les 20 premiers millimètres.

Le transducteur est fixé dans la paroi grâce un trou non traversant situé à 15mm au dessus du fond de la cellule. La sonde est alignée avec les électrodes d'injection du courant de telle sorte que la sonde Doppler ne mesure pas la composante de vitesse

<sup>9</sup>Ces échos sont créés par des particules d'oxydes présentes dans le fluide.

<sup>10</sup>PRF signifie Pulse Repetition Frequency

liée au forçage. L'origine  $\xi = 0$  est donnée par la position de la sonde sur la figure 2.2.2.

### 2.2.3 La mesure du champ de vitesse par le suivi de particules

Les méthodes optiques de mesure du champ de vitesse ont fortement progressé depuis 20 ans. La mesure par PIV (Particle Image Velocimetry) s'est imposée comme la méthode de référence. Cependant dans le cadre de notre expérience, son application se révèle être impossible techniquement. La PIV consiste à filmer un écoulement ensemencé par de fines particules avec des tailles de l'ordre du micron. À partir des images, le champ de vitesse est calculé en corrélant des portions de l'espace entre elles pour estimer leur déplacement. Comme cette méthode nécessite une importante densité de particules, il est nécessaire d'éclairer le fluide avec une source lumineuse de forte intensité, le plus souvent issue d'un laser.

Cependant cette technique optique n'est pas applicable à l'écoulement de galinstan, car la surface métallique est réfléchissante. On pourrait alors ensemencer la couche d'acide présente au-dessus du galinstan, mais à cause du faible espace présent dans la bobine et de la forte réflexion de la surface métallique, il est très difficile de projeter une nappe laser à travers la couche d'acide.

Nous avons donc opté pour un suivi lagrangien de particules à l'interface acide-galinstan. Cette technique permet l'obtention d'un champ de vitesse pour un faible nombre de traceurs (quelques milliers) et une distribution spatiale non-homogène de ces particules. Il reste cependant le problème de l'identification des particules sur une surface réfléchissante. Dans la section suivante nous présentons le dispositif optique permettant l'obtention d'un bon contraste.

#### Montage optique

Le montage est illustré sur la figure 2.7. On souhaite filtrer les réflexions de la surface métallique grâce à un jeu de polariseurs. Un premier polariseur est placé devant la lampe qui éclaire la cellule. Un second polariseur, dont la polarisation est croisée par rapport au précédent, est placé devant la caméra. Les réflexions directes dues à la surface métallique sont alors filtrées contrairement à celles provenant des particules. Ainsi seules les particules sont visibles sur l'image (cf figure 2.8).

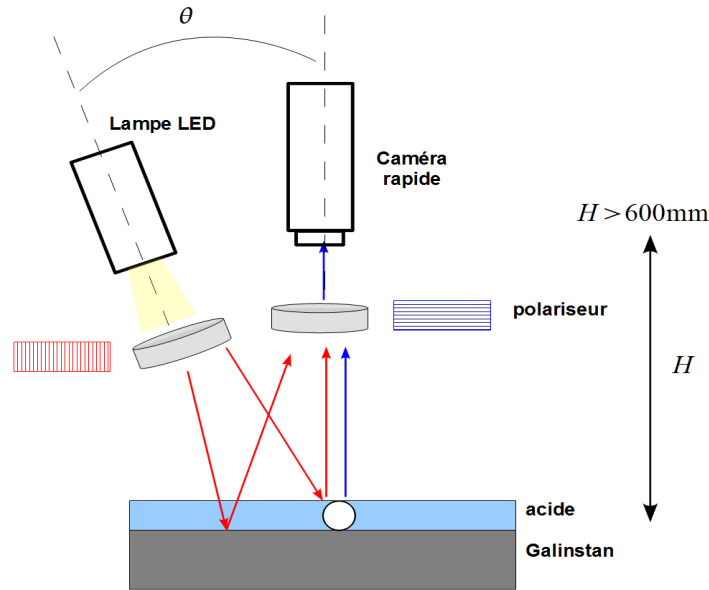


FIGURE 2.7 – Schéma du montage optique pour le suivi de particule. La lumière polarisée rectilignement (illustrée par les flèches rouges) qui éclaire la cellule est réfléchiée par la surface métallique puis est filtrée par le polariseur croisé devant la caméra. Cependant les petites particules vont diffuser un rayonnement comportant différentes polarisation (flèches bleues et rouges) et vont donc être visibles par la caméra.

En effet, l'angle d'incidence de l'éclairage étant faible ( $\theta \simeq 14^\circ$ ), l'onde incidente avec une polarisation rectiligne est réfléchiée avec une polarisation faiblement elliptique par la surface métallique. Le polariseur croisé fixé sur la caméra filtre la majeure partie de ces réflexions directes. Les particules diélectriques et rugueuses réfléchissent des ondes de polarisation différentes qui ne sont que partiellement filtrées. Les traceurs sont donc visibles par la caméra.

L'éclairage est assuré par une lampe LED de 2500 candela <sup>11</sup> et de 10 W, ce qui permet de ne pas chauffer le polariseur grâce au bon rapport intensité lumineuse sur puissance. L'angle d'ouverture du rayon lumineux est faible ( $24^\circ$ ) et permet focaliser l'éclairage. La caméra utilisée est une photron SA1, avec une fréquence d'acquisition de 60 Hz et une résolution de  $1024^2$  pixels.

<sup>11</sup>un candela correspond à  $1,4 \cdot 10^{-3}$  Watt par steradian. Un candela correspond approximativement à la luminosité d'une bougie.

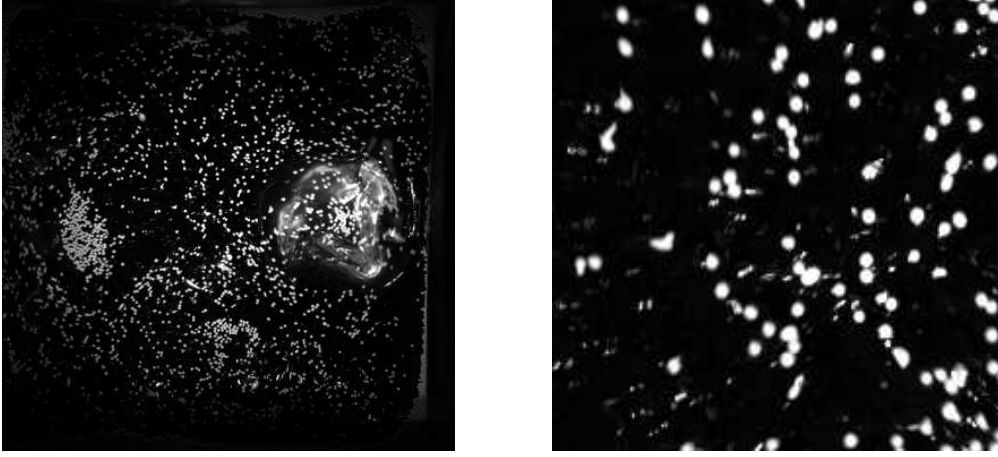


FIGURE 2.8 – Gauche : photographie des particules avec la présence des polariseurs. Droite : zoom sur la partie centrale.

### Les traceurs

Nous utilisons des particules blanches d'oxyde de zirconium, servant normalement au sablage des pièces métalliques. Le choix des particules s'est fait sur le critère de leur résistance à la corrosion par l'acide et parce qu'elles ne réagissent pas avec le galinstan <sup>12</sup>. Les particules semblent n'être attaquées par l'acide qu'au bout d'une à deux semaines. Leur diamètre est de  $0.6 \pm 0.1$  mm et leur densité est 5.7.

Pour s'assurer que les traceurs sont passifs et suivent l'écoulement, on calcule leur temps de réponse  $\tau_a$  à un changement entre la vitesse de la particule  $\mathbf{v}_p$  et celle du fluide  $\mathbf{V}$  tel que <sup>13</sup> [62]

$$\frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = -\frac{1}{\tau_a} (\mathbf{v}_p - \mathbf{V}) \quad \text{avec} \quad \tau_a = \frac{|\rho_p - \rho_f| d_p^2}{18\mu_f}. \quad (2.16)$$

Le temps  $\tau_a$  vaut  $6.2ms$  pour le galinstan et  $90ms$  pour l'acide. Comme les particules flottent à la surface du galinstan dans l'acide, on retiendra le temps associé à l'acide. L'entraînement de la couche d'acide par la surface métallique est assurée par le rapport des viscosités dynamiques proche de un. Les particules à l'interface suivent donc l'écoulement du métal liquide.

Pour que les traceurs suivent bien l'écoulement, il est nécessaire que le temps  $\tau_a$  soit inférieur au temps caractéristique de l'écoulement  $\tau_c$  qui est compris entre 0.1 et 1 seconde. Le calcul nous donne alors  $\tau_a/\tau_c \in [0.1, 1]$ . Dans le régime  $\tau_a/\tau_c \approx 1$ , les particules ne peuvent plus être considérées comme de simples traceurs du fait de l'importance de leur inertie.

On remarque une accumulation des particules à proximité des parois car la surface métallique est légèrement convexe à cause du ménisque. Cet effet, observable sur la photographie 2.8 de gauche (sur le bord en bas à droite), affecte le suivi des particules qui sont parfois piégées dans ce ménisque.

<sup>12</sup>Le galinstan a tendance à réagir avec beaucoup de métaux

<sup>13</sup>on suppose ici que les particules sont soumises à la force de Stokes et à l'effet de masse ajouté



## Traitement de l'image

Comme l'indique la figure 2.8, la répartition des particules n'est pas homogène. La reconstruction du champ de vitesse par un algorithme PIV n'est donc pas optimale car il existe des zones sans particules. Nous avons préféré une méthode de suivi de particules où leur trajectoire lagrangienne est reconstruite à partir de la série de mesure. Le traitement de l'image nécessite alors deux algorithmes : le premier repère les particules et le second reconstruit le champ de vitesse à partir de la position des particules entre deux images. Nous avons utilisé deux scripts *Matlab*.

Le repérage des particules est effectué grâce à la Toolbox **Sptrack1.0** de Saumya Saurabh (téléchargeable sur le site de [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)). Le champ de vitesse est reconstruit grâce aux codes développés par l'équipe de Nick Ouellette (disponibles sur le site [leviathan.eng.yale.edu](http://leviathan.eng.yale.edu)), basés sur un algorithme prédictif, afin de reconstruire la trajectoire de chaque particule. Il est possible de suivre entre 2000 et 4000 particules par image.

Le suivi permet aussi de filtrer la présence de reflets localisés dus à des faibles déformations de la surface, qui pourraient être confondus avec des particules. En effet, ces algorithmes permettent de fixer un seuil sur le nombre minimal d'images pour considérer la trajectoire comme pertinente. Les reflets n'étant présent que sur quelques images successives, l'algorithme filtre ces anomalies.

Nous serons aussi amenés à réduire la résolution du champ de vitesse qui est initialement donnée par la résolution de la caméra. Nous utiliserons une résolution plus petite de  $64^2$  points afin d'augmenter la densité de points sur la grille.

## Filtrage du champ de vitesse

L'estimation du champ de vorticité et de tout autre grandeur impliquant des dérivées nécessite une résolution inférieure aux plus petites échelles de vitesse. Pour un écoulement turbulent, ces échelles correspondent aux échelles de Kolmogorov, inaccessibles avec notre méthode de mesure. Il est cependant possible d'estimer les échelles de vorticité supérieures à l'échelle  $l$  en appliquant un filtre  $G(\mathbf{x}, l)$  sur le domaine  $D$  [18, 26] tel que

$$\bar{\mathbf{u}}_l(\mathbf{x}) = \frac{1}{I_G(\mathbf{x}, l)} \iint_D G(\mathbf{r} + \mathbf{x}, l) \mathbf{u}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (2.17)$$

où  $G(\mathbf{x}, l)$  est une fonction décroissant rapidement et ayant la propriété suivante  $G(\mathbf{x}, l) = l^{-2} G(\mathbf{x}/l, 1)$ . La convolution prend en compte l'effet des bords en renormant  $G(\mathbf{r} + \mathbf{x}, l)$  par son intégrale  $I_G(x, l)$

$$I_G(\mathbf{x}, l) = \iint_D G(\mathbf{r} + \mathbf{x}, l) d\mathbf{r} \quad (2.18)$$

La fonction gaussienne satisfait les propriétés citées ci-dessus

$$G(\mathbf{r}, l) = \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}|^2}{2l^2}\right) \quad (2.19)$$

$\bar{\mathbf{u}}_l(\mathbf{x})$  peut être interprété comme le champ de vitesse ne contenant que la contribution des échelles plus grandes que  $l$  [18]. Ce champ de vitesse obéit à l'équation de Navier-Stokes modifiée suivante

$$\partial_t \bar{\mathbf{u}}_l + \bar{\mathbf{u}}_l \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_l + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_l = -\nabla p_l + \frac{1}{Re} \Delta \bar{\mathbf{u}}_l - \frac{1}{Rh} \bar{\mathbf{u}}_l + \mathbf{f}_l \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_l, \quad (2.20)$$

où  $\boldsymbol{\tau}_l$  est le tenseur des contraintes des échelles inférieures à  $l$ , tel que :  $\boldsymbol{\tau}_l = \overline{\mathbf{u}_l \mathbf{u}_l} - \bar{\mathbf{u}}_l \bar{\mathbf{u}}_l$ .

## 2.3 Mesure de la dissipation par friction

### 2.3.1 Motivations

L'identification des processus dissipatifs est primordiale car elle permet de bien caractériser les régimes d'écoulements. Selon le degré de bidimensionalisation de l'écoulement, la dissipation visqueuse dans la direction verticale est dominée soit par la dissipation dans l'épaisseur totale du fluide soit par celle localisée dans la couche limite de Hartmann. Dans le premier cas, le temps de dissipation est de l'ordre du temps de relaxation d'un film visqueux  $\tau_\nu = h^2/\nu$  [31]. Dans le second, la dissipation est contrôlée par l'épaisseur de la couche limite de Hartmann [57].

La présence d'une dissipation additionnelle peut aussi être due à des perturbations turbulentes tridimensionnelles. La mesure de la dissipation permet donc de vérifier la bidimensionalisation de l'écoulement [53].

Afin de distinguer ces régimes, nous allons mesurer expérimentalement les temps de dissipation des structures à l'échelle de la cellule.

### 2.3.2 Les mesures

#### Protocole expérimental

Dans cette section nous présentons les résultats de la mesure de la dissipation d'un écoulement forcé à l'échelle de la cellule en fonction du champ magnétique appliqué. La hauteur de fluide  $h$  est constante et vaut 20 mm. On force mécaniquement grâce à un agitateur un écoulement à l'échelle de la cellule, en essayant de minimiser la déformation de la surface. On mesure ensuite la décroissance du flux  $\phi$  via les sondes Vives entre le centre de la cellule et le bord.

La figure 2.9 de droite représente une série temporelle de  $\phi(t)$  : l'écoulement à grande échelle est entretenu de  $t = 0s$  jusqu'à  $t \approx 10s$ . Ensuite le système relaxe vers l'équilibre où la perturbation est complètement amortie. Grâce à l'échelle semi-logarithmique sur l'insert, on remarque que la décroissance suit bien un comportement exponentiel

$$\phi(t) = \phi_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_e}\right) \quad (2.21)$$

avec  $\tau_e$  le temps de dissipation. Cette expression suggère que l'équation différentielle de  $\phi$  est linéaire. Quatre mesures sont effectuées pour chaque valeur du champ magnétique  $B_0$  et la moyenne de  $1/\tau_e$  est représentée sur la figure 2.10.

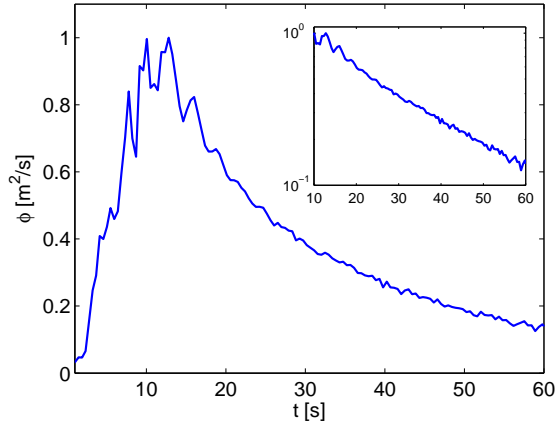


FIGURE 2.9 – Série temporelle du flux  $\phi(t)$ . L'insert comporte la courbe sur une échelle linéaire-logarithmique.

### Analyse des résultats expérimentaux

On identifie sur la figure 2.10 trois zones. Dans la première où  $B_0 < 0.02$  Tesla, la dissipation ne semble pas dépendre du champ magnétique et est presque constante. La seconde zone, où  $0.02 < B_0 < 0.07$  T, correspond à une zone transitionnelle. L'inverse du temps de dissipation croît avec le champ magnétique sans pour autant suivre un comportement vraiment linéaire. Dans la troisième zone, où  $B_0 > 0.07$  T,  $1/\tau_e$  varie linéairement avec le champ magnétique. Ce comportement est caractéristique de la dissipation par friction par la couche de Hartmann.

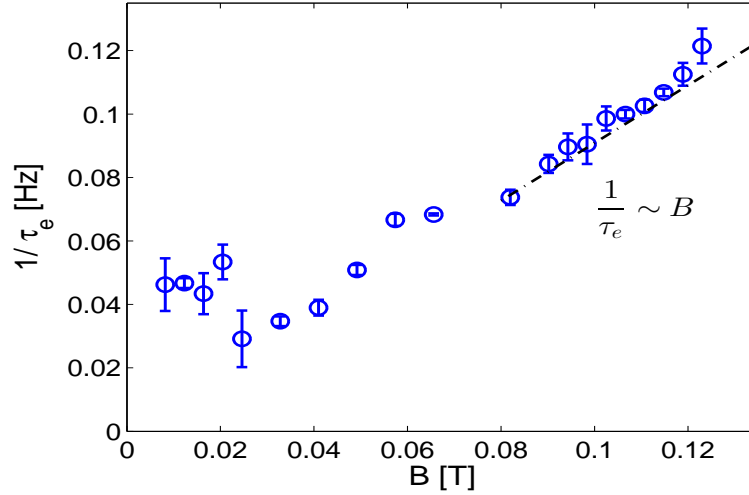


FIGURE 2.10 –  $1/\tau_e$ , l'inverse du temps de dissipation, en fonction de  $B_0$  pour  $h = 20mm$ .

Sur la figure 2.11 de gauche, nous avons tracé le rapport de la dissipation mesurée  $1/\tau_e$  sur la dissipation théorique des couches de Hartmann  $1/\tau_H$ , telle que

$$\frac{1}{\tau_H} = \frac{\nu}{\delta_H h} = \frac{B_0}{h} \left( \frac{\sigma \nu}{\rho} \right)^{1/2} \quad (2.22)$$

avec  $\delta_H$  l'épaisseur de la couche limite de Hartmann (cf chapitre 1). Ce rapport  $\tau_H/\tau_e$  est pour  $B_0 > 0.07$  T de l'ordre de 1.3 sur toute cette gamme (cf figure 2.11 de gauche). L'accord avec la prédiction théorique est assez bon.

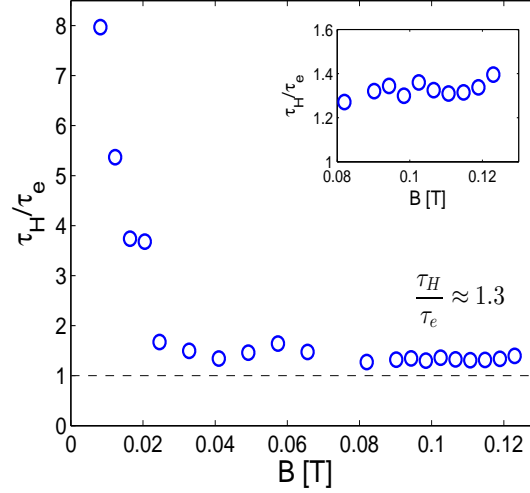


FIGURE 2.11 – Rapport des temps de dissipation théoriques  $\tau_e$  sur les temps expérimentaux  $\delta_H$  en fonction du champ magnétique appliqué  $B_0$ .

On peut donc conclure que le coefficient de dissipation par friction dans la gamme  $B_0 \in [0.07, 0.12]$  Tesla varie linéairement avec le champ magnétique et est 30% plus élevée que la prédiction théorique.

Comme le coefficient de dissipation par friction mesuré semble être en bon accord avec la théorie, on peut alors conclure que l'épaisseur de la couche limite ainsi que le nombre de Hartmann  $Ha$  dans l'expérience sont du même ordre que la prédiction théorique. À partir du temps dissipatif  $\tau_e$ , on peut estimer l'épaisseur de la couche limite  $\delta_H = \nu \tau_H / h \simeq 0.2$  mm. Dans la suite, on considèrera donc que le nombre de Hartmann est de l'ordre de  $Ha = h / \delta_H \simeq 100$ , avec  $h = 20$  mm, dans la gamme des champs magnétiques appliqués.

Nous n'avons pas encore discuté de la stabilité de la couche limite de Hartmann. Le comportement linéaire de  $1/\tau_e$  permet de supposer que la couche limite de Hartmann est stable. De plus, le nombre de Reynolds calculé à partir de l'épaisseur de la couche limite  $Re_h = \delta_h V / \nu$  est de l'ordre de 50 pour  $V \simeq 0.1$  m/s et  $\delta_h \simeq 0.2$  mm. Ce nombre de Reynolds est inférieur aux seuils mesurés expérimentalement [47] et au seuil issu du calcul de stabilité linéaire [37].

Cette mesure expérimentale confirme la présence dans les équations de Navier-Stokes 2D d'un terme dissipatif linéaire contrôlé par le champ magnétique pour  $B_0 > 70$  mT. Cette mesure est en bon accord avec les prédictions théoriques. Nous nous placerons donc dans la suite de cette thèse dans cette gamme de champ magnétique.

## 2.4 Adimensionnement des équations de Navier-Stokes 2D

### 2.4.1 Les nombres sans dimension

Dans cette section, nous allons calculer les paramètres sans dimension, qui déterminent les régimes d'écoulement de notre expérience. Nous partons de l'équation de Navier-Stokes 2D

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B}_0 - \frac{1}{\tau_H} \mathbf{v} + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (2.23)$$

Chaque terme de cette équation est homogène à une accélération. Afin d'adimensionner ces équations, nous avons besoin d'une distance et d'un temps  $(L_c, \tau_c)$ . On choisit la distance  $L_c$  comme étant égale à la largeur de la cellule soit  $L_c = 12$  cm. Nous allons choisir le temps caractéristique de sorte que le forçage soit de l'ordre de l'unité. Le forçage étant homogène à une accélération, on a alors l'égalité

$$\frac{L_c}{\tau_c^2} = [\rho^{-1} \mathbf{j} \times \mathbf{B}_0] \quad \text{ainsi} \quad \tau_c = \sqrt{\frac{\rho L}{j B_0}} \quad \text{ou} \quad \tau_c = \sqrt{\frac{\rho h L^2}{I B_0}} \quad (2.24)$$

en posant la densité de courant  $j$  égale au courant injecté  $I$  divisé par la surface  $L \times h$ . Cet adimensionnement revient à fixer la vitesse caractéristique  $v_c$  telle que le terme inertiel équilibre celui du forçage. En posant  $\mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot (\tau_c/L)$  la vitesse adimensionnée, on a

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{f} - \frac{\tau_c}{\tau_H} \mathbf{u} + \frac{\nu \tau_c}{L^2} \Delta \mathbf{u} \quad (2.25)$$

$\mathbf{f}$  étant le forçage adimensionné. On définit alors les deux nombres sans-dimension  $Re$  (le nombre de Reynolds) et  $Rh$

$$Re = \frac{L_c^2}{\nu \tau_c} = \frac{L}{\nu} \sqrt{\frac{I B_0}{\rho h}} \quad Rh = \frac{\tau_H}{\tau_c} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{I h}{\sigma \nu B_0}}. \quad (2.26)$$

Ces deux nombres sans dimension comparent les effets dissipatifs aux effets inertiels. Le Reynolds est le rapport entre le temps visqueux  $\tau_\nu = L^2/\nu$  et le temps du forçage  $\tau_c$  et  $Rh$  le rapport entre  $\tau_H$  et  $\tau_c$ . On a finalement

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{f} - \frac{1}{Rh} \mathbf{u} + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}. \quad (2.27)$$

Le rapport de  $Re$  sur  $Rh$  fait intervenir les deux nombres sans dimension qui caractérisent la bidimensionalisation de l'écoulement, c'est à dire le rapport  $h/L$  et le nombre de Hartmann

$$\frac{Re}{Rh} = \left( \frac{L}{h} \right)^2 Ha \quad (2.28)$$

Dans la section précédente, nous avons estimé  $Ha \simeq 100$  et le rapport  $L/h$  est de l'ordre de 10. Le rapport  $Re$  sur  $Rh$  est donc de l'ordre de  $10^4$ .

### 2.4.2 Les échelles dissipatives

Dans notre expérience, nous avons donc deux sources de dissipation, la dissipation par friction dans la couche de Hartmann et la dissipation visqueuse. La dissipation visqueuse agit plus efficacement sur les petites échelles alors que la dissipation par friction agit principalement sur les échelles contenant le plus d'énergie.

Les échelles les plus énergétiques correspondent aux grandes échelles. Il doit donc exister une échelle de transition  $l_t$  séparant la gamme d'échelles spatiales dominée par la dissipation par friction et celle dominée par la dissipation visqueuse

Soit  $D_\nu(l)$  et  $D_H(l)$ , les puissances dissipées par effet visqueux et par friction pour une échelle spatiale  $l$  donnée, telle que

$$D_\nu(l) \approx - \left( \frac{L}{l} \right)^2 \frac{1}{Re} u_l^2 \quad D_H(l) \approx - \frac{1}{Rh} u_l^2 \quad (2.29)$$

avec  $u_l^2$  l'énergie contenue dans les structures de taille  $l$ . L'échelle de transition  $l_t$  est celle où ces deux puissances sont du même ordre, c'est à dire

$$\frac{D_\nu(l_t)}{D_H(l_t)} = \left( \frac{L^2}{l_t^2} \frac{1}{Re} \right) Rh = 1 \quad (2.30)$$

L'application numérique donne alors

$$\frac{l_t}{L} = \sqrt{\frac{Rh}{Re}} \approx 10^{-2}. \quad (2.31)$$

La friction domine donc toutes les échelles plus grandes que  $l_t$ , c'est à dire celle au-dessus de  $L$  divisé par 100, qui contiennent notamment les échelles plus grandes que le forçage. Comme nous nous intéresserons essentiellement à la dynamique des grandes échelles, le paramètre de contrôle le plus pertinent sera le nombre sans-dimension  $Rh$ .

# Chapitre 3

## Transition de l'écoulement laminaire vers le régime chaotique

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>44</b>
<b>3.2</b>	<b>Étude de l'écoulement laminaire . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>3.3</b>	<b>L'instabilité fourche . . . . .</b>	<b>49</b>
3.3.1	Les mesures par les sondes Vives . . . . .	49
3.3.2	Un modèle de bifurcation à partir des équations de Navier-Stokes . . . . .	50
<b>3.4</b>	<b>Bifurcations de Hopf . . . . .</b>	<b>54</b>
3.4.1	Première bifurcation de Hopf . . . . .	54
3.4.2	Seconde bifurcation de Hopf . . . . .	56
<b>3.5</b>	<b>Transition vers le chaos par intermittence . . . . .</b>	<b>59</b>
<b>3.6</b>	<b>Résumé . . . . .</b>	<b>61</b>

---

## 3.1 Introduction

### Instabilités des écoulements bidimensionnels

Avant de décrire plus en détails les propriétés de l'écoulement turbulent dans les prochains chapitres, nous allons étudier les différentes transitions observées lorsque le paramètre de contrôle  $Rh$  est graduellement augmenté. Il existe une importante bibliographie sur les instabilités dans les écoulements de Kolmogorov, dont le forçage est périodique spatialement. Bien que la première bifurcation soit celle qui ait reçue le plus d'attention [29, 54, 60, 61], peu d'articles traitent de la route vers le chaos [7, 30, 56].

La route vers le chaos dans l'article de Sommeria [56] est étudiée qualitativement et est caractérisée par une succession d'appariements de vortex pour un réseau initial de  $6 \times 6$  tourbillons. Dans les articles de Guzdar *et al.* [30] et Braun *et al.* [7], les auteurs ont analysé numériquement la route vers le chaos respectivement pour un réseau de  $1 \times 4$  et  $8 \times 8$  tourbillons, mais avec des conditions limites périodiques et sans la présence d'une dissipation par friction. Ces conditions sont très différentes du contexte expérimental pour que ces études puissent être comparées aux expériences.

Notre étude propose donc la première analyse quantitative et expérimentale de la route vers le chaos pour un écoulement bidimensionnel avec un forçage périodique spatialement.

### Structure du chapitre

Nous décrirons initialement la structure de l'écoulement laminaire dans la section 2. Puis dans la section 3, nous présenterons la première bifurcation supercritique associée à une brisure de symétrie. Nous introduirons un modèle issu des équations de Navier-Stokes décrivant la bifurcation et la saturation du mode instable. Nous étudierons ensuite la seconde et troisième bifurcations, qui sont des bifurcations de Hopf, dans la section 4. Finalement nous présenterons la dernière bifurcation menant au chaos dans la section 5. Cette transition vers le chaos est caractérisée par un scénario d'intermittence, où le chaos apparaît par bouffée de durées inégales.

### Adimensionnement des résultats

Dans ce chapitre, les vitesses ainsi que les fréquences et temps mesurés sont adimensionnés par  $\tau_c$  et  $v_c$ , le temps et la vitesse définis à partir de la taille de la cellule,  $L = 12\text{cm}$  et de l'amplitude du forçage par unité de masse, qu'on notera  $F$ <sup>1</sup>

$$F = \frac{IB_0}{Lh\rho} \quad (3.1)$$

avec  $I$  est le courant injecté,  $B_0$  le champ magnétique appliqué,  $\rho$  la masse volumique du galinstan et  $h$  la hauteur de liquide. Ainsi  $\tau_c$  et  $v_c$  sont définis par

$$\tau_c = \sqrt{\frac{L}{F}} = \sqrt{\frac{L^2 h \rho}{IB_0}} \quad v_c = \sqrt{FL} = \sqrt{\frac{IB_0}{h\rho}} \quad (3.2)$$

---

<sup>1</sup>au lieu de  $f$  dans ce chapitre pour ne pas le confondre avec la fréquence  $f$



Nous rappelons aussi que le paramètre de contrôle de notre expérience est le nombre sans dimension  $Rh$  qui est le rapport entre le temps  $\tau_H$ , le temps de dissipation par friction et  $\tau_c$ , défini ci-dessus.

## 3.2 Étude de l'écoulement laminaire

### Les équations de Stokes

Pour des  $Rh$  faibles, c'est à dire inférieurs à l'unité, l'écoulement est laminaire et stationnaire. Le champ de vitesse de cet écoulement laminaire  $\mathbf{u}$  est solution de l'équation de Stokes

$$-\nabla\pi + \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{u} - \frac{1}{Rh}\mathbf{u} + \mathbf{F} = 0 \quad (3.3)$$

avec les conditions aux limites de vitesse nulle sur les parois. En prenant le rotationnel de cette équation, on élimine le terme de pression et on réduit le problème à la seule fonction  $\omega$ , le champ de vorticité (au lieu des deux composantes du champs de vitesse), soit

$$-\frac{1}{Re}\Delta\omega + \frac{1}{Rh}\omega = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_z \quad \Rightarrow \quad -\epsilon\Delta\omega + \omega = Rh (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_z \quad (3.4)$$

avec  $\epsilon = Rh/Re \simeq 10^{-4}$ . Au premier ordre, nous pouvons négliger l'opérateur Laplacien<sup>2</sup> pondéré par le terme  $\epsilon$ . Avec cette simplification, la vorticité est principalement localisée là où le rotationnel du forçage est non-nul. Or, nous avons vu dans le chapitre précédent que le rotationnel du forçage est proportionnel au courant injecté  $j_{z0}$ , avec

$$\int_0^h (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_z dz = -j_{z0}B_0 \quad (3.5)$$

avec  $B_0$  le champ magnétique appliqué et  $h$  l'épaisseur de fluide. Nous nous attendons donc à observer une forte localisation de la vorticité au-dessus des électrodes.

### Description de l'écoulement

Sur la photographie de la figure 3.2, on observe bien les huit tourbillons, grâce aux oxydes qui jouent le rôle de traceurs. L'écoulement respecte bien les symétries du forçage, c'est à dire les symétries par réflexion selon les axes  $0x$  et  $0y$ . Le champ de vitesse stationnaire obtenu par la technique du suivi de particules est représenté sur la figure de droite pour  $Rh = 1$ .

---

<sup>2</sup>le terme Laplacien sera à l'origine de couches limites proches des parois et des électrodes

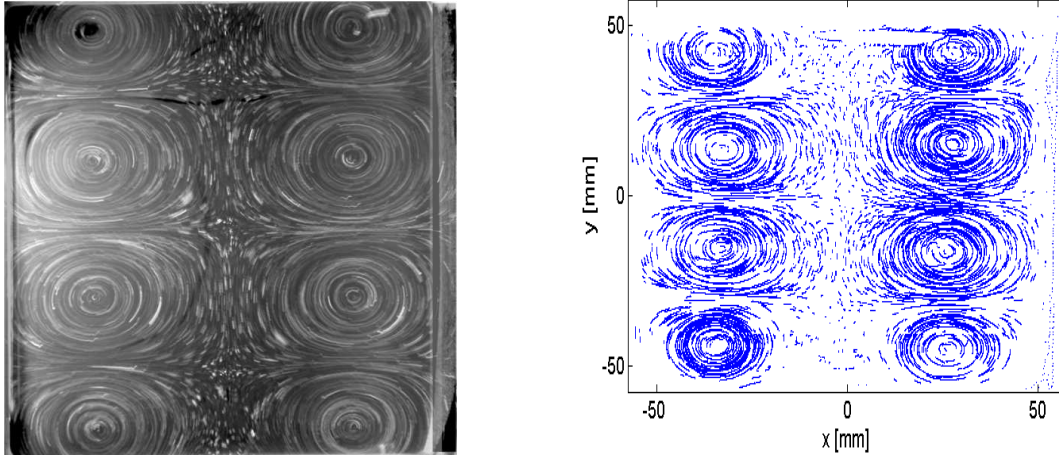


FIGURE 3.1 – Gauche : photo de l'écoulement où les oxydes jouent le rôle de traceurs. Droite : champ de vitesse obtenu grâce au suivi de particules.

### Étude du champ de vorticité

Sur la figure 3.2, on a représenté le champ de vorticité calculé à partir du champ de vitesse filtré par une fonction gaussienne  $G(\mathbf{r}, l)$  de variance  $l^2$ . Sur la figure de gauche, on a fixé  $l = 1.2$  mm (soit 10 pixels pour une résolution  $1024^2$ ) et à droite,  $l = 2.4$  mm.

Sur la première figure, on remarque que la vorticité est concentrée au-dessus des électrodes et des bandes de vorticité de signe alterné entourent le tourbillon au-dessus de l'électrode. Sur la seconde figure, la taille du filtre est doublée et le filtre a atténué l'intensité de ces bandes

La présence de ces bandes de vorticité de signes opposés autour de l'électrode est surprenante. En première approche, on peut expliquer leur présence par l'inhomogénéité de la répartition des particules. En effet l'écoulement étant laminaire, les particules restent toujours sur les mêmes lignes de courant. Or ces lignes de courant sont séparées par des zones de vitesse relativement faible ou nulle. Le calcul de la vorticité sur ce champ de vitesse fait donc apparaître des bandes de vorticité de signes opposés séparant les zones de hautes et basses vitesses. Il est donc nécessaire de filtrer le champ de vitesse par une taille de filtre  $l$  assez grande.

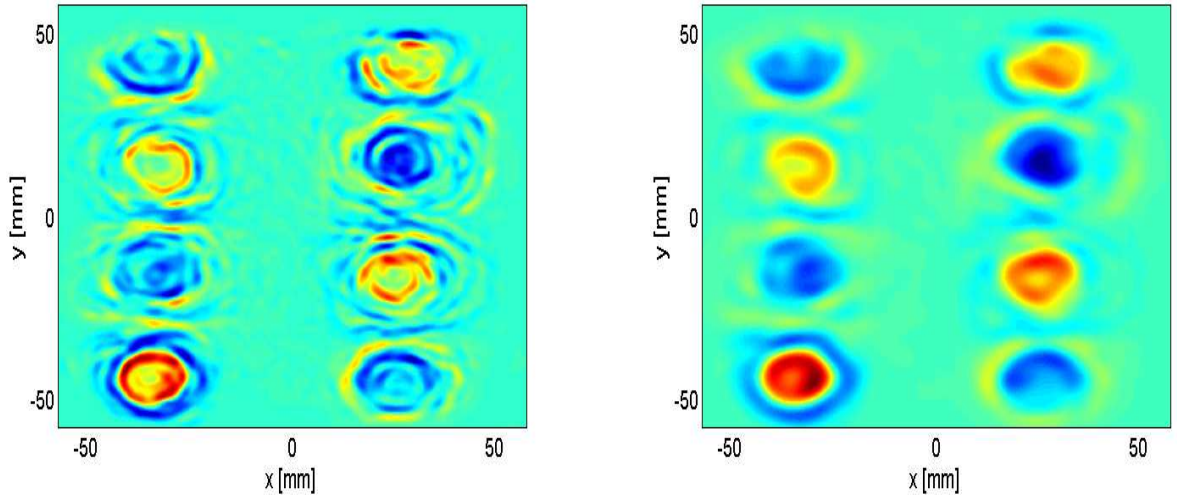


FIGURE 3.2 – Champ de vorticité calculé à partir du champ de vitesse filtré par une fonction gaussienne de largeur  $l$ . À gauche,  $l = 1.2\text{mm}$ , à droite,  $l = 2.4\text{mm}$ .

### Allure des profils de vitesse

Sur la figure 3.3, nous avons tracé les profils de vitesse. À gauche, nous avons représenté la composante  $u_x$  filtrée ( $l = 2.4\text{mm}$ ) en fonction de  $y$  pour  $x = 30\text{mm}$ . Cette abscisse correspond à la rangée de quatre d'électrodes dans la direction  $y$ . À droite, la composante  $u_y$  filtrée est tracée en fonction de  $x$  pour  $y = 15\text{mm}$ . Cette ordonnée correspond à la rangée de deux d'électrodes dans la direction  $x$ . Les profils  $u_x(y)$  et  $u_y(x)$  sont normés par leur maximum. Ils sont globalement symétriques, avec une légère différence sur l'amplitude des pics positifs pour  $u_y(x)$ .

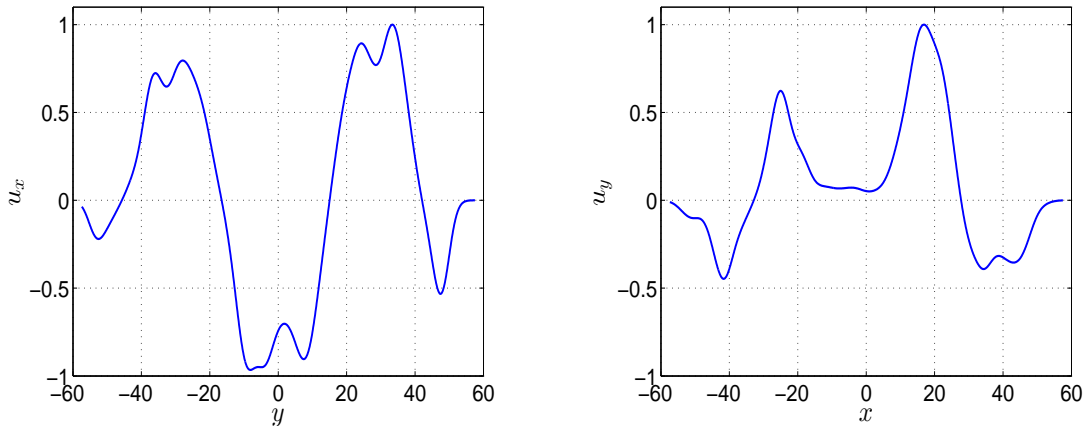


FIGURE 3.3 – Gauche : profil de vitesse de  $u_x(y)$  filtré ( $l = 2.4\text{mm}$ ) pour  $x = 30\text{mm}$ . Droite : profil de vitesse de  $u_y(x)$  filtré pour  $y = 15\text{mm}$ .

## Décomposition en série de Fourier des profils

Dans le but d'obtenir un spectre spatial de ces profils, nous décomposons la fonction de courant en série de Fourier

$$\psi = \sum_{n_x, n_y} \hat{\psi}(n_x, n_y) \sin\left(\frac{\pi n_x}{L} x'\right) \sin\left(\frac{\pi n_y}{L} y'\right) \quad (3.6)$$

avec  $x' = (x + L/2)$  et  $y' = (L/2 + y)$  compris entre 0 et  $L$ , ce qui revient à placer l'origine au point  $(x, y) = (-L/2, -L/2)$ . Les modes de Fourier sont uniquement composés de produit de sinus. La justification de cette décomposition est donnée dans l'article de Sommeria [56]. Le profil de vitesse  $u_y(x)$  peut être rendu périodique sur l'intervalle  $[-L, L]$  en prolongeant le profil sur les  $x$  négatifs par la transformation  $u_y(x) = -u_y(-x)$ . Le signal est alors anti-symétrique et ainsi décomposable en sinus de longueur d'onde  $2L$ , d'où l'équation 3.6.

Ainsi,  $\hat{\psi}(n_x, n_y)$  est la composante de Fourier avec pour nombre d'onde  $(n_x, n_y)$ . Quant au champ de vitesse, il se décompose comme

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \sum_{n_x, n_y} \hat{u}_x(n_x, n_y) \sin\left(\frac{\pi n_x}{L} x'\right) \cos\left(\frac{\pi n_y}{L} y'\right) \\ u_y(x, y) &= \sum_{n_x, n_y} \hat{u}_y(n_x, n_y) \cos\left(\frac{\pi n_x}{L} x'\right) \sin\left(\frac{\pi n_y}{L} y'\right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Les spectres des deux profils de la figure 3.3 sont représentés sur la figure 3.7. On constate que le profil  $u_x(y)$  a une forte composante sur le mode  $n_y = 4$ . Quant au profil  $u_y(x)$ , la décomposition indique que l'énergie est principalement sur les modes  $n_x = 2$  et  $n_x = 6$ .

Cette analyse de Fourier montre que la localisation de l'injection de vorticité introduit d'autres composantes que celles attendues. En effet, le forçage étant défini par un réseau de  $2 \times 4$  tourbillons, nous nous attendons donc à obtenir deux pics essentiellement sur les modes  $n_x = 2$  et  $n_y = 4$ . L'émergence de la composante  $n_x = 6$  dans le spectre est due à la localisation du forçage en vorticité. En effet, la longueur d'onde associée à ce mode est  $L/n_x \sim 2cm$  avec  $L$  la largeur de la cellule, qui correspond au double de la largeur de l'électrode.

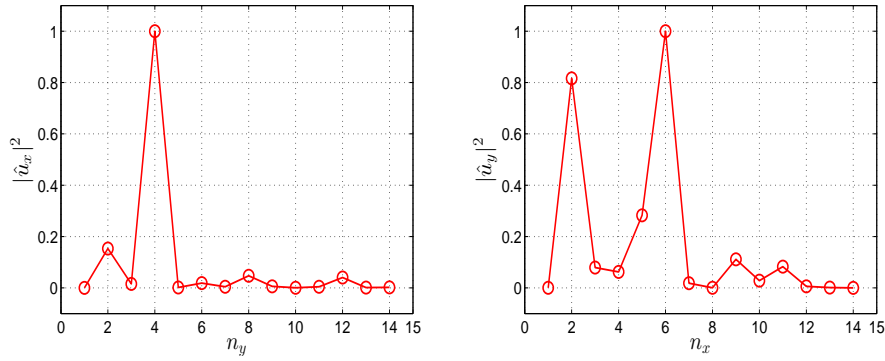


FIGURE 3.4 – Gauche : décomposition en modes de Fourier donnée par l'équation 3.7 du profil de vitesse de  $u_x(y)$ . A droite : décomposition en modes de Fourier du profil de vitesse de  $u_y(x)$

### 3.3 L'instabilité fourche

#### 3.3.1 Les mesures par les sondes Vives

##### Description de l'instabilité

L'écoulement laminaire se déstabilise pour  $Rh_c = 1.55$ . Comme l'illustre la figure 3.5, les vortex diagonaux de même signe semblent s'apparier. Le cœur de ces tourbillons, où la vorticité est concentrée, sont toujours bien identifiables, ce qui implique qu'ils ne fusionnent pas.

En fait un écoulement moyen est superposé aux vortex, et selon le signe de cet écoulement, les lignes de courants connectent les vortex diagonaux. Cette instabilité est donc liée à l'apparition d'une circulation à l'échelle de la cellule.

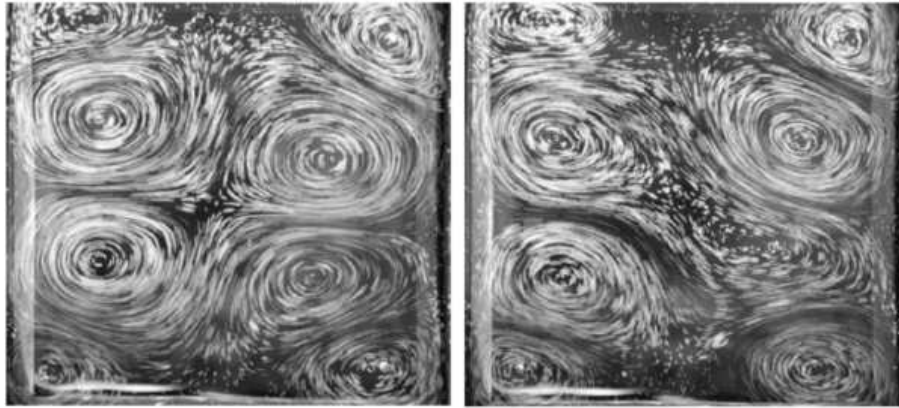


FIGURE 3.5 – Photographie de l'écoulement pour  $Rh > Rh_c$ . Les deux photos représentent les deux états symétriques caractéristiques de la bifurcation fourche.

Il en résulte que pour  $Rh > Rh_c$ , l'écoulement n'est plus symétrique par réflexion selon les axes  $0x$  et  $0y$ .

## Diagramme de bifurcation

L'amplitude de l'instabilité est alors mesurable par les sondes Vives, qui mesurent le flux  $\phi_L$  entre le centre et la paroi de la cellule. Dans la suite du chapitre, nous présenterons aussi des mesures directes de la tension  $V$  entre les deux électrodes, dont le facteur de conversion avec le flux est le champ magnétique appliqué  $\mathbf{B}_0$ , soit  $V = B_0 \phi_L$ . Le diagramme de bifurcation est tracé sur la figure 3.6 avec  $Rh$  comme paramètre de contrôle.

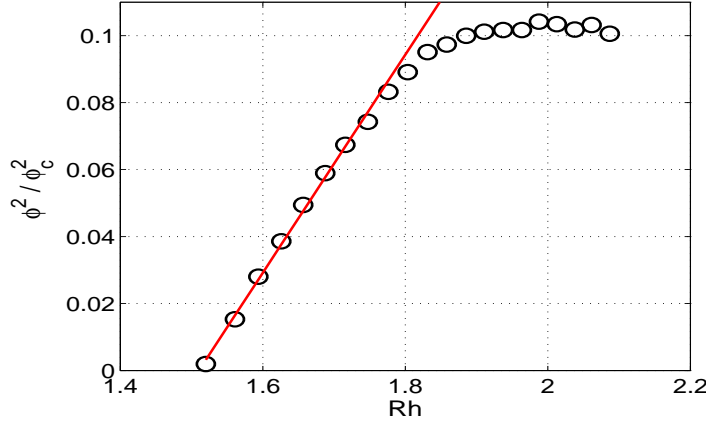


FIGURE 3.6 – Diagramme de bifurcation du flux  $\phi_L$  adimensionné au carré.

Le flux normé est  $\phi_L^2$  divisé par  $\phi_c^2$ , le flux construit à partir de la taille  $L$  de la cellule et de l'amplitude du forçage  $F$ , tel que  $\phi_c = \sqrt{FL^3}$ . On observe un comportement linéaire au seuil, propriété caractéristique des bifurcations fourches supercritiques.

### Forme normale par arguments de symétrie

Nous notons  $A$  l'amplitude du mode de vitesse associée à la brisure de symétrie. Le flux  $\phi/\phi_c$  adimensionnée est ainsi proportionnel à l'amplitude de  $A$ . La symétrie initiale de l'écoulement laminaire impose que si  $A$  est solution alors  $-A$  l'est aussi. Ainsi proche du seuil, la forme normale de  $A$  ne comporte que des puissances impaires de  $A$ . De plus  $A$  étant réel, les coefficients doivent être tous réels. On a alors

$$\dot{A} = \mu A - \beta A^3 + \mathcal{O}(A^5). \quad (3.8)$$

Comme l'indique le diagramme de bifurcation, la bifurcation est supercritique. On pose  $\mu = Rh - Rh_c$  et en redimensionnant le temps, on peut fixer  $\beta = 1$ . L'amplitude de  $A$  sature donc à la valeur  $A_c \sim \sqrt{Rh - Rh_c}$ , en accord avec la figure 3.5.

### 3.3.2 Un modèle de bifurcation à partir des équations de Navier-Stokes

#### Généralité sur les instabilités des écoulements de Kolmogorov

La dérivation de l'équation d'amplitude de  $A$  à partir des équations de Navier-Stokes est particulièrement difficile et technique. Les premiers calcul d'instabilité pour des

écoulements 2D périodiques spatialement, qu'on appelle usuellement écoulements de Kolmogorov <sup>3</sup>, datent des années 80 avec les travaux de Sivashinsky et Yakhot [54] et de Gotoh et Yamada [29]. Cependant leur calcul ne prend en compte ni l'effet des parois, ni la présence d'une dissipation par friction.

Le premier calcul prenant en compte ces effets a été réalisé par Thess [61] qui a calculé numériquement le seuil de l'instabilité en fonction de  $Re$  et  $Rh$ . Un des résultats importants de cet article est l'effet de la dissipation par friction quantifiée par  $Rh$ , qui inhibe l'instabilité à grande échelle au profit d'une instabilité où les tourbillons voisins s'apparient mais ne fusionnent pas. Dans le cadre de notre expérience, ce type de mécanisme se confond avec un mécanisme d'instabilité à grande échelle, du fait de la faible séparation d'échelle entre la taille de la cellule et celle du forçage.

Bien que simplifiant fortement le problème, nous allons présenter un calcul analytique dont la structure du mode saturé, ainsi que le seuil de instabilité sont similaires aux résultats expérimentaux.

## Présentation du modèle

Pour notre calcul, nous allons nous restreindre à un nombre fini de modes de Fourier identifiés dans la section précédente (cf équation 3.7). Notre modèle consiste à tronquer les équations de Navier-Stokes à un faible nombre de modes. Cette méthode a été précédemment utilisée par Sommeria et Verron [58] dans le cas d'un écoulement avec un forçage  $2 \times 2$  tourbillons. Nous ne prendrons pas en compte la dissipation visqueuse, qui est négligeable par rapport à la dissipation par friction.

On suppose que le forçage et l'écoulement laminaire sont essentiellement composés du mode de Fourier  $(n_x, n_y)$  égal à  $(2, 4)$ . L'instabilité impliquant une composante à grande échelle, nous devons prendre en compte le mode de Fourier  $(1, 1)$ . Les équations de Navier-Stokes n'autorisent les transferts d'énergie entre modes que par le biais d'interactions triadiques. Nous considérons donc aussi tous les modes qui permettent le transfert d'énergie entre les modes  $(1, 1)$  et  $(2, 4)$ . Notre modèle contient ainsi les modes suivants

- Le mode ayant la plus grande projection sur le forçage  $(n_{xf}, n_{yf}) = (2, 4)$ , dont la fonction de courant est notée  $\psi_f$ .
- Le mode à grande échelle  $(n_x, n_y) = (1, 1)$ , dont la fonction de courant est notée  $\psi_0$ .
- Les quatre modes permettant l'interaction entre les deux précédents modes, c'est à dire :  $(1, 3)$ ,  $(1, 5)$ ,  $(3, 3)$  et  $(3, 5)$ . Les fonctions de courant associées sont notées  $\psi_i$ .

## Les équations du système non-linéaire

L'équation de la fonction de courant  $\psi$  est donnée par

$$\partial_t \Delta \psi + J(\psi, \Delta \psi) = -\frac{1}{Rh} \Delta \psi - (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{e}_z \quad (3.9)$$

---

<sup>3</sup>L'écoulement type est l'écoulement simplement cisailé  $\mathbf{u} = \cos(ky)\mathbf{e}_x$

avec  $J$ , le jacobien 2D des fonctions  $(\psi, \Delta\psi)$ . En passant dans l'espace de Fourier et en tronquant le système aux modes décrits ci-dessus, le système non-linéaire devient

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 &= \sum_i \alpha_{0i} \psi_i \psi_f - \frac{\psi_0}{Rh^*} \\ \dot{\psi}_f &= \sum_i \alpha_{fi} \psi_0 \psi_i - \frac{\psi_f}{Rh^*} + 1 \\ \dot{\psi}_i &= \alpha_{Ii} \psi_f \psi_0 - \frac{\psi_i}{Rh^*} \end{cases} \quad (3.10)$$

Les coefficients de couplage  $\alpha$  sont calculés grâce au jacobien  $J$  entre les différents modes de Fourier. Le tableau 3.1 donne les valeurs des différents coefficients  $\alpha'$  tel que  $\alpha = \alpha' \pi^2 / 4$ .

Les coefficients  $\alpha_{Ii}$  sont liés à l'advection grande échelle du forçage donnant les modes  $\psi_i$ . Les coefficients  $\alpha_{0i}$  pondèrent l'interaction entre le mode  $\psi_i$  et  $\psi_f$  qui force l'écoulement à grande échelle. Les  $\alpha_{fi}$  sont liés à la rétroaction sur le mode de forçage, permettant la saturation de l'instabilité.

$(n_x, n_y)$	$\alpha'_{0i}$	$\alpha'_{fi}$	$\alpha'_{Ii}$
(1, 3)	10	4/5	-36/10
(1, 5)	18	-36/5	54/13
(3, 3)	6	24/5	-6
(3, 5)	14	-16/5	18/17

TABLE 3.1 – Coefficient  $\alpha'$  de l'équation 3.10, tels que  $\alpha = \alpha' \pi^2 / 4$ .

Le nombre  $Rh^*$  des équations 3.10 est différent du  $Rh$  de l'équation 3.9. En effet, le passage dans l'espace de Fourier a fait apparaître un terme pondérant le forçage. L'adimensionnement de l'équation change alors le temps  $\tau_c$  et donc  $Rh^*$  (cf chapitre précédent).  $Rh$  s'exprime en fonction de  $Rh^*$  comme

$$Rh = \left( \pi \frac{n_{xf}^2 + n_{yf}^2}{n_{xf} + n_{yf}} \right)^{1/2} Rh^* \simeq 3.2 Rh^* \quad (3.11)$$

### Solutions du système

L'équation 3.10 a une solution triviale  $\psi_0 = \psi_i = 0$  et  $\psi_f = Rh^*$ . La résolution numérique des équations montre que cette solution devient instable pour un certain  $Rh_c$  (cf figure 3.7). Il apparaît une seconde solution stationnaire, telle que



$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0^L = \pm \frac{1}{Rh_c^*} \frac{1}{\sqrt{|\sum_i \alpha_{fi} \alpha_{Ii}|}} \left[ 1 - \left( \frac{Rh_c^*}{Rh^*} \right)^2 \right]^{1/2} \\ \psi_f^L = Rh_c^* \left( \frac{Rh_c^*}{Rh^*} \right) \\ \psi_i^L = \pm Rh_c^* \frac{\alpha_{Ii}}{\sqrt{|\sum_i \alpha_{fi} \alpha_{Ii}|}} \left[ 1 - \left( \frac{Rh_c^*}{Rh^*} \right)^2 \right]^{1/2} \end{array} \right. \quad (3.12)$$

avec  $Rh_c^*$  le seuil de l'instabilité qui vaut

$$Rh_c^* = \left( \sum_i \alpha_{0i} \alpha_{Ii} \right)^{-1/4} \quad (3.13)$$

Cette solution existe à condition que les coefficients respectent les inégalités suivantes

$$\sum_i \alpha_{fi} \alpha_{Ii} < 0 \quad \text{et} \quad \sum_i \alpha_{0i} \alpha_{Ii} > 0 \quad (3.14)$$

Le calcul de  $Rh_c^*$  grâce aux coefficients du tableau 3.1 donne  $Rh_c^* = 0.31$ , ce qui correspond à  $Rh_c \simeq 1$ , seuil en bon accord avec l'expérience même s'il est un peu en-dessous du seuil mesuré à  $Rh_c = 1.55$ . Les amplitudes des modes  $\psi_0^L$  et  $\psi_i^L$  décrivent une bifurcation supercritique. En effet au seuil de l'instabilité et en posant  $\epsilon = (Rh^* - Rh_c^*)/Rh_c^*$ , on obtient pour le développement limité de l'amplitude au seuil

$$\left[ 1 - \left( \frac{Rh_c^*}{Rh^*} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[ 1 - \left( \frac{1}{1 + \epsilon} \right)^2 \right]^{1/2} \simeq \epsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (3.15)$$

Le diagramme de bifurcation de  $\psi_0^L$  (en bleu) et  $\psi_f^L$  (en rouge) est tracé sur la figure 3.7 de gauche. La fonction de courant du forçage tend vers zéro alors que celles de  $\psi_0^L$  et  $\psi_i^L$  vont tendre vers une valeur finie pour  $Rh \rightarrow \infty$ . Les lignes de courant de l'écoulement pour  $Rh^* = 1.2Rh_c^*$  sont représentées sur la figure de droite. On remarque la forte ressemblance entre l'allure des lignes de courants et la photographie de la figure 3.5 de gauche.

La résolution numérique du système de l'équation 3.10 montre que ce nouvel état est stable même pour des  $Rh$  élevés. Or, comme nous le verrons par la suite, cet écoulement se déstabilise et devient oscillant. La troncature dans l'espace de Fourier avec seulement six modes semble être suffisante pour expliquer la bifurcation fourche, mais il est nécessaire d'ajouter de nouveaux modes pour capturer la dynamique aux  $Rh$  plus élevés.

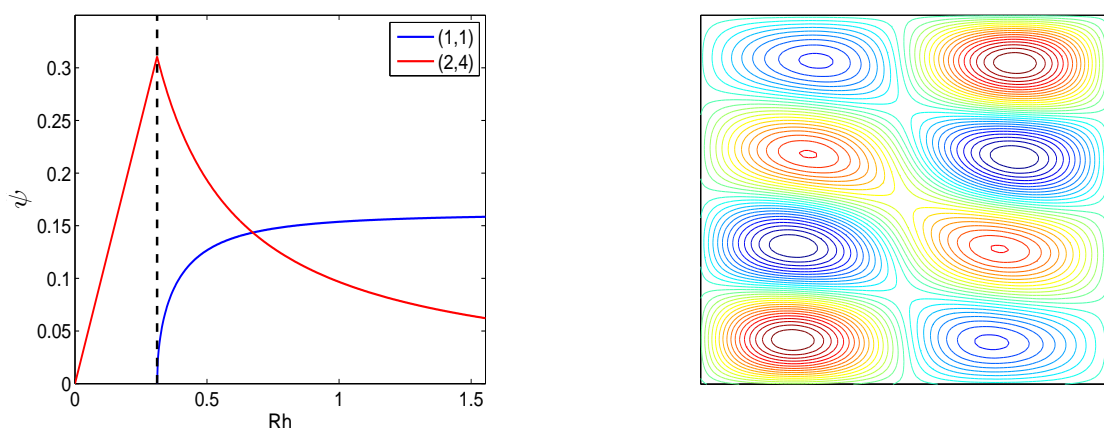


FIGURE 3.7 – Gauche : courbe de bifurcation de la fonction de courant du mode de Fourier (1, 1) en bleu et (2, 4) en rouge. Droite : lignes de courant de l'état bifurqué pour  $Rh^* = 1.2Rh_c^*$ .

En conclusion, même si le modèle est très simplifié, il reproduit bien qualitativement la forme des lignes de courant de l'état saturé et donne un seuil théorique assez proche du seuil expérimental. En effet, nous avons montré dans le chapitre précédent que la dissipation effective dans l'expérience est 30% plus élevée que le prévoit la théorie, le seuil calculé vaut alors  $Rh_c = 1.3$ . Comparé au seuil expérimental  $Rh_c = 1.55$ , l'écart est inférieur à 15%.

## 3.4 Bifurcations de Hopf

### 3.4.1 Première bifurcation de Hopf

En augmentant progressivement le nombre  $Rh$ , nous observons une seconde instabilité, qui se développe pour  $Rh'_c = 1.7$ . Elle présente un comportement oscillant (cf figure 3.9) et brise ainsi l'invariance temporelle  $t \rightarrow t + \Phi_0/\omega$  avec  $\Phi_0$  une phase quelconque. Ces oscillations correspondent à l'émission de vortex comme l'indique les photographies de la figure 3.8. Sur la photographie du milieu, on observe la présence de deux vortex au-dessus de la deuxième électrode de gauche en partant du bas. Le vortex émis disparaît rapidement, sans doute à cause des effets dissipatifs (le  $Rh$  est encore très faible).

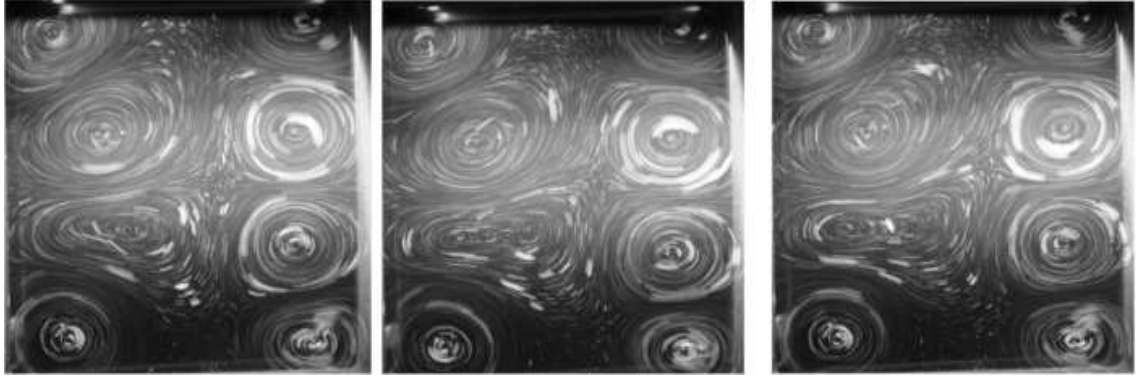


FIGURE 3.8 – Trois photographies montrant l’émission progressive d’un vortex au-dessus de la deuxième électrode de gauche en partant du bas.

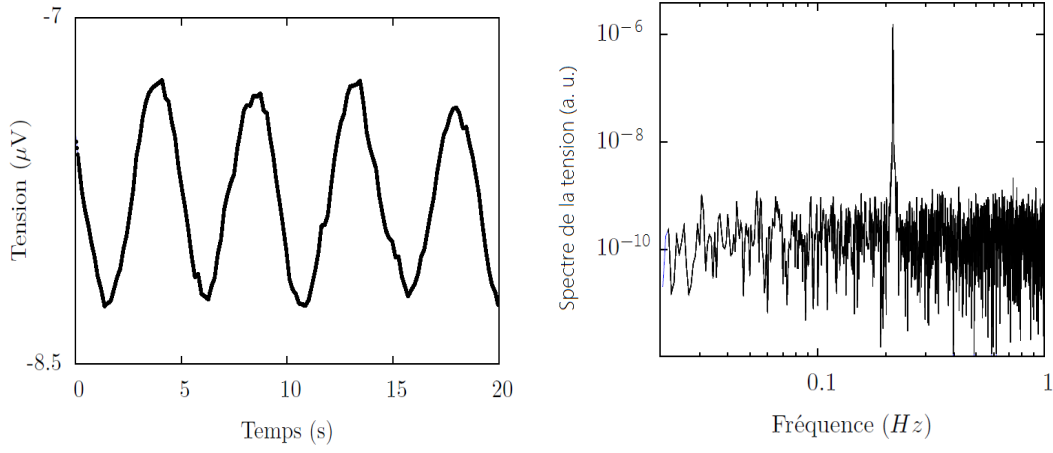


FIGURE 3.9 – Gauche : série temporelle de la tension mesurée sur la sonde Vives entre le centre de la cellule et la paroi pour  $Rh = 1.9$ . Droite : spectre de la transformée de Fourier du flux  $\phi$  en unité arbitraire, associée à la série temporelle de gauche.

Afin de décrire quantitativement la bifurcation, nous introduisons une nouvelle variable  $B$ , l’amplitude du mode de vitesse oscillant telle que  $\phi/\phi_c \propto A + Re[B(t)e^{i\omega t}]$ .  $B$  est complexe et  $\omega$  est la pulsation de la perturbation au seuil de l’instabilité. Nous définissons aussi  $f_0$  la fréquence de la perturbation, qui au seuil vaut  $f_0 = \omega/(2\pi)$ . L’instabilité se développant après une bifurcation fourche dont la solution est stationnaire, l’écoulement de base est invariant par translation dans le temps. La forme normale de  $B$  est alors invariante par changement de phase<sup>4</sup>  $B \rightarrow Be^{i\Phi_0}$ , la forme normale est ainsi

$$\dot{B} = (\mu_r + i\mu_i)B + (\beta_r + i\beta_i)|B|^2B \quad (3.16)$$

En posant  $B = re^{i\theta}$ , on a le système suivant

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu_r r + \beta_r r^3 \\ \dot{\theta} = \mu_i + \beta_i r^2 \end{cases} \quad (3.17)$$

<sup>4</sup>Ceci est une conséquence de l’invariance par translation dans le temps :  $t \rightarrow t + \Phi_0/\omega$

La première équation est analogue à la forme normale d'une bifurcation fourche et comme l'indique la courbe de bifurcation 3.10, la bifurcation de l'amplitude est supercritique. Ainsi, on peut choisir la valeur des coefficients, telles que  $\mu_r = Rh - Rh'_c$  et  $\beta_r = -1$ . La norme de  $|B|^2$ , qui est le carré de la composante de Fourier à la fréquence  $f_0$ , varie bien linéairement avec l'écart au seuil.

Pour la phase  $\theta$ , la variation de la pulsation  $\mu_i$  varie au premier ordre linéairement avec  $Rh$  soit  $\mu_i = \gamma(Rh - Rh_c)$  avec  $\gamma$  réel. L'évolution de la fréquence est donc affine avec  $f_0 = (\omega + \mu_i)/(2\pi)$ . La figure 3.10 de droite confirme cette dépendance linéaire. La fréquence  $f_0$  est très proche de la fréquence  $1/\tau_c$ , qui correspond à la fréquence du forçage  $\tau_c^{-1} = \sqrt{F/L}$ , avec  $L$  la largeur de la cellule et  $F$  l'amplitude du forçage.

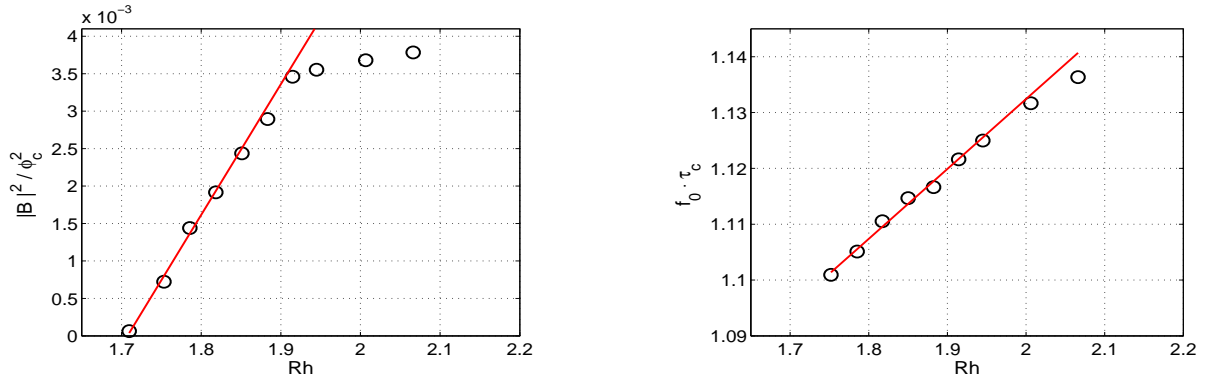


FIGURE 3.10 – Gauche : amplitude au carré de la composante de Fourier de l'oscillation sur  $\phi_c^2 = FL^3$ , où  $L$  est la largeur de la cellule et  $F$  l'amplitude du forçage. Droite : évolution de la fréquence  $f_0$  de l'oscillation multipliée par  $\tau_c = \sqrt{L/F}$  en fonction de  $Rh$ .

### 3.4.2 Seconde bifurcation de Hopf

#### Mesure de la bifurcation

Une seconde bifurcation de Hopf est observée (la troisième bifurcation) pour  $Rh \simeq 2$  (figure 3.11 de gauche), avec l'apparition d'une nouvelle fréquence  $f_1$  (figure de droite). Nous constatons (cf figure 3.12 de droite) que l'amplitude de la composante de Fourier croît en racine carré à l'écart au seuil et la fréquence varie linéairement. C'est de nouveau une bifurcation de Hopf supercritique.

Les fréquences  $f_0$  et  $f_1$  sont incommensurables, c'est à dire que leur rapport ne peut pas se mettre sous la forme d'un rapport de deux entiers  $n/m$ . De plus la variation linéaire des fréquences  $f_0$  et  $f_1$ , confirme qu'il n'existe pas de phénomène d'accrochage entre les deux fréquences, car elles varient indépendamment l'une de l'autre. La dynamique est alors quasi-périodique, car malgré l'apparente périodicité du signal, la trajectoire dans l'espace des phases ne repasse jamais par les mêmes points.

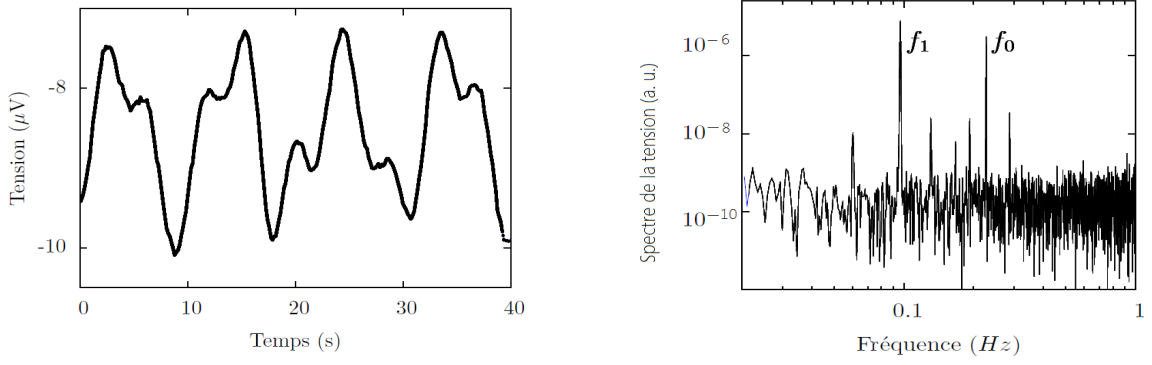


FIGURE 3.11 – Gauche : amplitude de la tension mesurée pour  $Rh = 2.1$ . Droite : spectre de la tension pour  $Rh = 2.1$ .

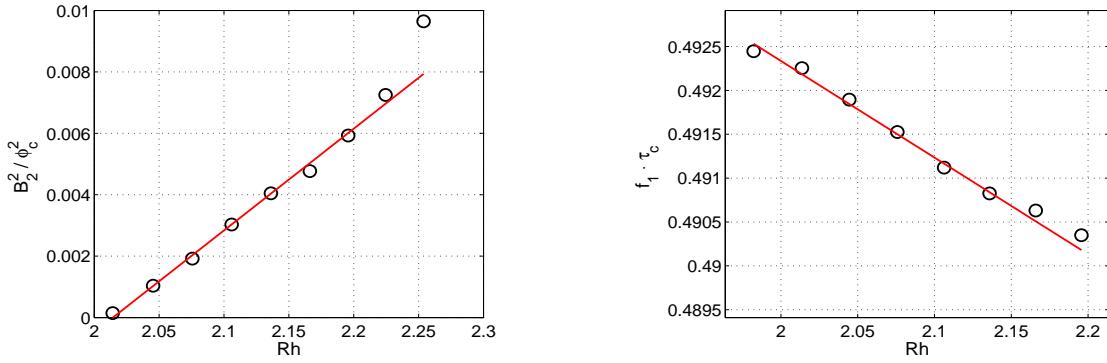


FIGURE 3.12 – Gauche : amplitude de la composante de Fourier  $B$  de l'oscillation sur  $\phi_c$  au carré. Droite : évolution de la fréquence  $f_1$  de l'oscillation multipliée par  $\tau_c$  en fonction de  $Rh$ .

### Forme normale de la bifurcation

Juste avant la seconde bifurcation de Hopf, l'écoulement est oscillant avec une fréquence égale à  $f_0$ . Le système est donc invariant par translation  $t \rightarrow t + n/f_0$  avec  $n$  un entier. En notant  $C(t)$  l'amplitude complexe de la bifurcation, on suppose que le flux est alors proportionnel à

$$\phi \propto A + \text{Re}[B e^{i2\pi f_0 t} + C(t) e^{i2\pi f_1 t}] \quad (3.18)$$

avec  $f_1$  la fréquence de la nouvelle perturbation périodique. Ainsi le mode instable dont l'amplitude est donnée par  $C(t) e^{i2\pi f_1 t}$  est invariant par translation  $t \rightarrow t + n/f_0$ , ce qui implique que la forme normale de  $C$  est invariante par la transformation suivante

$$C(t) \rightarrow C(t) \exp\left(i2\pi n \frac{f_1}{f_0}\right) \quad (3.19)$$

Or les deux fréquences  $f_1$  et  $f_0$  sont incommensurables. Ainsi pour tout  $n$  entier, la phase de l'exponentielle est égale à une phase réelle  $\Phi_0$ , avec  $\Phi_0 \in [0, 2\pi[$ , modulo  $2\pi$

$$2\pi n \frac{f_1}{f_0} = \Phi_0 + [2\pi] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.20)$$

La forme normale de  $C$  est alors invariante pour toute translation  $C(t) \rightarrow C(t)e^{i\Phi_0}$ , comme pour l'amplitude de  $B$ . On retrouve alors le même comportement que pour la première bifurcation de Hopf supercritique, soit

$$\dot{C} = (\mu'_r + i\mu'_i)C + (\beta'_r + i\beta'_i)|C|^2C \quad (3.21)$$

La norme de  $C$  croit donc comme la racine de l'écart au seuil et la fréquence  $f_1$  varie linéairement en fonction de  $Rh$ .

### Caractérisation de l'attracteur

La dynamique évolue sur un tore dans l'espace des phases et le remplit densément du fait de la quasi-périodicité (cf figure 3.13 de droite), ce qui suppose que l'attracteur est de dimension 2. On a vérifié cette propriété pour  $Rh = 2.3$  grâce à la méthode des délais [40], que nous allons décrire dans le paragraphe suivant.

Le principe repose sur la reconstruction de l'attracteur à partir de la série temporelle d'une seule observable  $\phi_L(t)$ . Lorsque l'attracteur est de dimension plus grande que 1, il est nécessaire d'avoir plus d'information que la seule série  $\phi_L(t)$  pour spécifier  $\mathbf{X}(t)$ , la trajectoire dans l'espace des phases. La dynamique étant déterministe le vecteur  $\Phi = [\phi_L(t), \phi_L(t + \tau), \dots, \phi_L(t + (n - 1)\tau)]$  va complètement déterminer  $\mathbf{X}(t)$ , dans la limite  $n$  grand.

L'entier  $n$  est appelé la dimension de plongement de l'attracteur et correspond à la dimension de l'espace recréé à partir de la série temporelle  $\phi_L$ . Quant au temps  $\tau$ , il correspond au temps de décohérence du système. Ce temps doit être choisi dans le but de minimiser la redondance d'information entre les dimensions de plongement. Un choix possible pour  $\tau$  est le temps correspondant au premier zéro de la fonction de corrélation. De plus, la dimension de plongement doit être supérieure à la dimension effective  $d_e$  de l'attracteur et la borne inférieure est fixée par  $n > 2d_e + 1$ . Cette étape permet de recréer un espace pour calculer ensuite la dimension de l'attracteur.

Il est possible d'estimer la dimension de l'attracteur reconstruit à partir de la méthode des délais en calculant la dimension de Hausdorff. Pour calculer cette dimension, nous estimons pour chaque point  $\phi_L$ , le nombre de points voisins  $N_v(r)$  compris dans la sphère de rayon  $r$ .  $N_v(r)$  doit croître comme  $r^{d_H}$  avec  $d_H$  la dimension de Hausdorff de l'attracteur. Sur la figure 3.13, on a représenté l'évolution de  $d_H$  en fonction de la dimension de plongement  $n$ . On remarque que la courbe converge vers la valeur  $d_H \simeq 2$  pour  $n > 5$ , ce qui confirme que l'attracteur est bien un tore et que la dynamique est bien quasi-périodique.

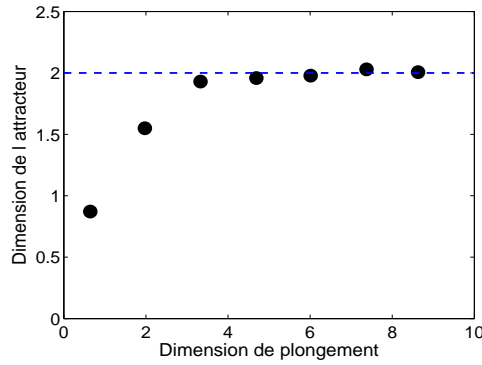


FIGURE 3.13 – Dimension de Hausdorff en fonction de la dimension de plongement.

### 3.5 Transition vers le chaos par intermittence

À partir de  $Rh = 2.6$ , des bouffées chaotiques apparaissent dans le signal comme l'illustre la figure 3.14 de gauche. Ces bouffées indiquent que le tore perd sa stabilité. Pendant ces bouffées, le système explore une partie de l'espace des phases pour revenir ensuite dans le voisinage du tore.

On parle alors de scénario de transition vers le chaos par intermittence <sup>5</sup>. Ces scénarios reposent souvent sur la déstabilisation d'un cycle limite, comme décrit initialement par Pomeau et Manneville [51], mais rarement d'un tore. L'intermittence à partir d'un tore a été initialement observée expérimentalement en convection par Gollub et Benson [28], puis Maurer et Libchaber [43].

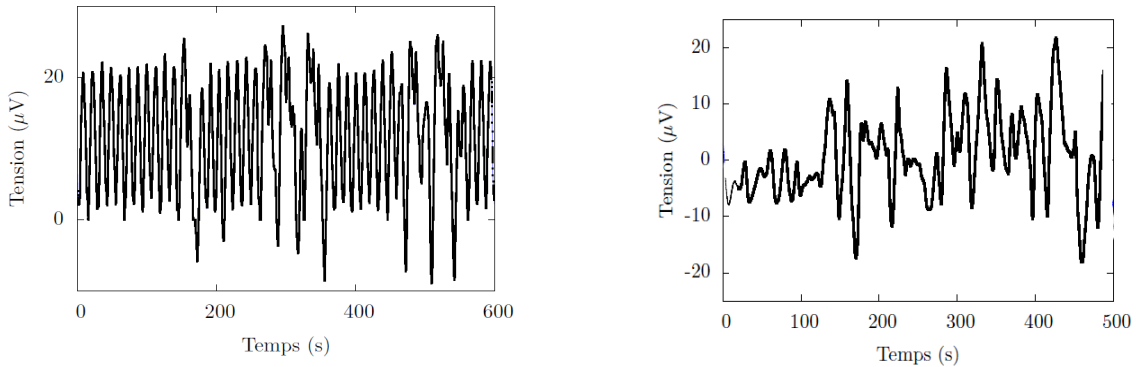


FIGURE 3.14 – Gauche : série temporelle de la tension à  $Rh = 2.6$ , correspondant au régime d'intermittence. Droite : série temporelle de la tension à  $Rh = 3.1$ , correspondant au régime chaotique.

Pour caractériser le phénomène d'intermittence, nous avons calculé la distribution des durées  $\tau$  des phases dites laminaires, comportant des oscillations quasi-périodiques, en opposition aux phases chaotiques, où le signal fluctue de manière erratique. La distribution  $P$  est tracée sur la figure 3.15 avec la durée  $\tau$  adimensionnée par la

<sup>5</sup>ce phénomène est différent du phénomène d'intermittence en turbulence qui est caractérisé par la déviation des distribution des incréments de vitesse de la distribution gaussienne

fréquence  $f_1$ . Sur la figure de gauche, la distribution est représentée en échelle linéaire-logarithmique et à droite logarithmique-logarithmique. On constate la présence d'une bosse à  $f_1\tau \simeq 7$  puis une décroissance de  $P$  aux temps longs. Cependant, on ne peut pas déterminer si la décroissance de la distribution est logarithmique ou en loi de puissance.

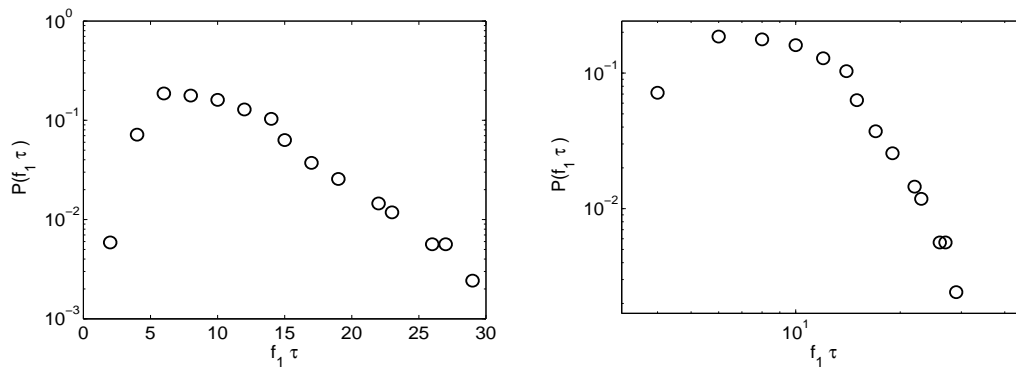


FIGURE 3.15 – Distribution  $P(\tau)$  des durées des phases laminaires normées par  $f_1$  pour  $Rh = 2.6$ . A gauche échelle linéaire-logarithmique et à droite échelle logarithmique-logarithmique.

Sur la figure 3.14 de gauche, on remarque que le système revient toujours dans le voisinage du même tore après une bouffée chaotique, où la tension moyenne est positive, et ne va jamais sur le tore symétrique correspondant à une tension négative. Les bassins d'attraction correspondant aux deux tores sont donc bien séparés au seuil de l'intermittence.

On a constaté qualitativement une augmentation du temps moyen des bouffées chaotiques avec  $Rh$ , sans pour autant l'avoir quantifiée. Lorsque  $Rh$  est plus grand que 3.1, les bouffées laminaires sont indiscernables et la dynamique semble être devenue complètement chaotique. La tension fluctue alors autour de la valeur zéro de manière erratique (cf figure 3.14 de droite) et le spectre de la tension présente un spectre continu (cf figure 3.16).

Nous n'avons cependant pas poussé l'étude de cette transition et des mesures complémentaires seraient nécessaires pour caractériser plus finement le scénario d'intermittence et plus spécifiquement l'évolution des bassins d'attractions correspondant aux deux tores ayant perdu leur stabilité.



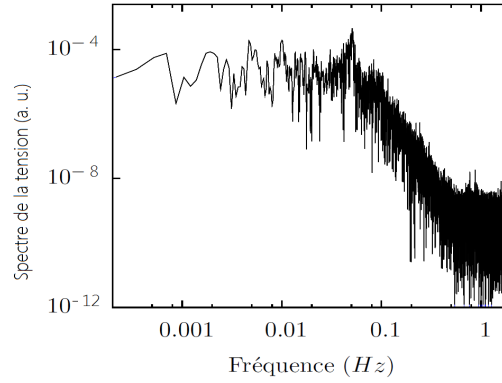


FIGURE 3.16 – Spectre de la série temporelle à  $Rh = 3.1$ , correspondant au régime chaotique.

### 3.6 Résumé

Nous avons décrit dans ce chapitre les différentes transitions de l'écoulement pour des  $Rh$  faibles à partir de l'état laminaire. Entre l'état laminaire et le régime chaotique, nous avons identifié quatre bifurcations illustrées par la figure 3.17

- Une première bifurcation fourche à  $Rh = 1.55$ , dont le nouvel état brise les symétries spatiales de l'écoulement laminaire. L'attracteur correspondant est un point fixe.
- Une première bifurcation de Hopf à  $Rh = 1.7$ . Le nouvel état est oscillant avec une fréquence  $f_0$ , brisant l'invariance temporelle. L'attracteur correspondant est un cycle limite.
- Une seconde bifurcation de Hopf à  $Rh = 2$ . Une nouvelle fréquence  $f_1$ , non commensurable avec  $f_0$ , apparaît. L'attracteur correspondant est un tore.
- Le tore perd sa stabilité pour  $Rh = 2.6$  et l'intermittence apparaît. La dynamique est alors composée de phases laminaires proches du tore et de phases chaotiques, où le système explore une partie de l'espace des phase.

Finalement, l'écoulement devient chaotique pour  $Rh > 3.1$  et les phases laminaires sont indiscernables des bouffées chaotiques .

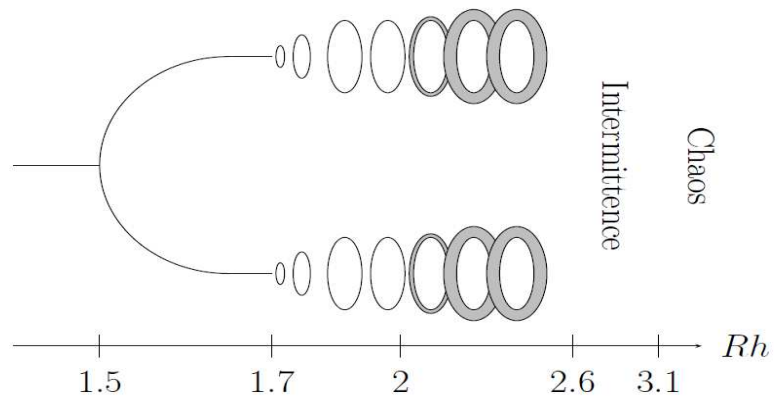


FIGURE 3.17 – Illustration des différents états et bifurcations observés lors de la transition de l'état laminaire au régime chaotique.



# Chapitre 4

## Spectres temporels dans le régime turbulent

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>4.2</b>	<b>Mesures des sondes Vives . . . . .</b>	<b>65</b>
4.2.1	Les spectres temporels . . . . .	65
4.2.2	Distribution des durées entre changements de signe . . . . .	71
4.2.3	Comparaison entre les exposants du spectre et de la distribution . . . . .	74
<b>4.3</b>	<b>Mesures par sondes Doppler ultrasoniques . . . . .</b>	<b>75</b>
<b>4.4</b>	<b>Observation de structures cohérentes dans l'espace physique . . . . .</b>	<b>78</b>
<b>4.5</b>	<b>Un modèle pour les spectres en <math>1/f</math> . . . . .</b>	<b>81</b>
4.5.1	Introduction . . . . .	81
4.5.2	Discussion sur un modèle classique de bruit en $1/f$ . . . . .	82
4.5.3	Théorie du renouvellement et spectre en $1/f$ . . . . .	82
<b>4.6</b>	<b>Un modèle de processus stochastique pour la distribution <math>P(\tau)</math> . . . . .</b>	<b>85</b>
4.6.1	Introduction . . . . .	85
4.6.2	L'équation maîtresse . . . . .	86
4.6.3	Processus non-markovien : $\Gamma$ dépendant du temps . . . . .	87
4.6.4	Simulations du processus stochastique non-markovien . . . . .	88
<b>4.7</b>	<b>Comparaison avec d'autres études expérimentales et numériques . . . . .</b>	<b>93</b>
<b>4.8</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>94</b>

---

## 4.1 Introduction

Lorsque la turbulence 2D est pleinement développée, les interactions non-linéaires transfèrent la plus grande partie de l'énergie injectée vers les grandes échelles. Bien que la dynamique de l'écoulement reste chaotique, des études expérimentales et numériques [12, 59, 67] rapportent l'observation d'une structuration de l'écoulement en amas de vortex englobés par une circulation à grande échelle. Cette structuration semble être également présente dans notre expérience comme l'illustre la figure 4.1. L'observation qualitative de notre écoulement montre que ces structures peuvent avoir des temps de vie parfois beaucoup plus longs que leur temps de retournement.

L'objectif de ce chapitre est de déterminer et d'identifier la présence d'une signature temporelle associée à ces structures cohérentes. Nous allons dans cette section étudier les spectres temporels de la vitesse de l'écoulement à grande échelle  $U_L$ .

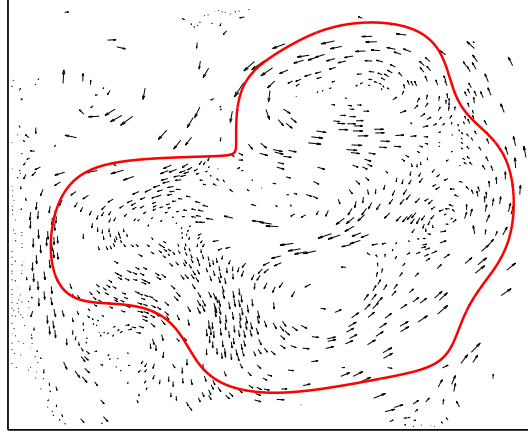


FIGURE 4.1 – Champ de vitesse obtenu par le suivi de particules. En rouge, une iso-valeur de la fonction courant  $\psi$  estimée à partir du champ de vitesse. La circulation représentée par la courbe rouge, englobe quatre vortex tournant dans le même sens et un vortex central tournant dans le sens opposé.

## 4.2 Mesures des sondes Vives

### 4.2.1 Les spectres temporels

#### Les mesures et les traitements

Nous présentons dans cette section les mesures obtenues par les sondes Vives correspondant aux deux électrodes placées au centre et proche de la paroi. Nous rappelons que ce flux nommé  $\phi_L$  (chapitre 2) correspond à l'écoulement moyen dans la cellule. Nous utiliserons la vitesse moyennée  $U_L = \phi/(L/2)$  représentée sur la figure 4.2. Cette grandeur est dominée par la contribution des structures de taille supérieure à  $L/2$ .

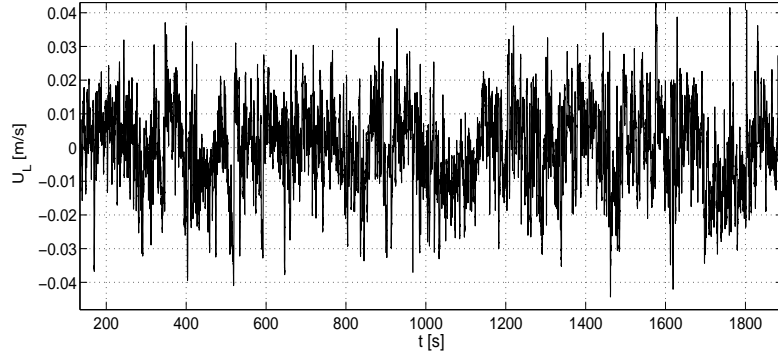


FIGURE 4.2 – Série temporelle de  $U_L$ , la vitesse moyenne entre le centre et le bord de la cellule obtenue par les sondes Vives pour  $Rh = 16$ .

Les spectres présentés dans cette section sont calculés à partir de mesures à champ magnétique constant avec  $B = 9,8 \cdot 10^{-2}$  T. Le courant injecté  $I$  est compris entre 7 et 150 A, pour que le paramètre de contrôle  $Rh$  varie de 10 à 46. Les mesures sont effectuées sur des durées  $T_f$  allant de 5 à 8 heures. La durée maximale de mesure est contrainte par les variations des conditions expérimentales, telles que la température ou l'oxydation de la surface.

Les spectres temporels  $E(f)$  de  $U_L(t)$  sont calculés selon

$$E(f) = \frac{1}{T_f} \langle \hat{U}_L(f) \hat{U}_L(f)^* \rangle \quad \text{avec} \quad \hat{U}_L(f) = \int_0^{T_f} U_L(t) e^{i2\pi f t} dt, \quad (4.1)$$

avec  $\langle \cdot \rangle$  la moyenne sur les échantillons <sup>1</sup>. Les spectres  $E(f)$  sont représentés en fonction de la fréquence  $f$  sur la figure 4.3, pour différents  $Rh = [16, 19, 25, 30]$ . Afin de les distinguer, ils sont multipliés par des puissances de 10 croissantes. Le spectre du bas correspond à la mesure avec  $Rh = 16$  et celui du haut avec  $Rh = 30$ .

Nous remarquons deux tendances différentes sur les composantes basses et hautes fréquences, séparées par la fréquence de transition  $f_{tr}$  (rond rouge sur la figure 4.3). Les deux portions du spectre semblent suivre une loi d'échelle mais avec un exposant plus faible pour la partie basse fréquence ( $f < f_{tr}$ ). Nous n'avons d'ailleurs pas observé de fréquence de coupure sur la gamme fréquentielle  $f < f_{tr}$ . La coupure du spectre à haute fréquence est située à la fréquence  $f_{cut}$ . Pour  $f > f_{cut}$ , le spectre atteint un plateau correspondant au bruit de la mesure.

L'analyse systématique des fréquences  $f_{tr}$  et  $f_{cut}$  montre qu'elles varient en fonction de  $Rh$  (figure 4.4 de gauche). Sur la figure de droite, nous avons divisé  $f_{tr}$  et  $f_{cut}$  respectivement par  $f_L$ , la fréquence d'advection à grande échelle et  $f_c = 1/\tau_c$ , la fréquence du forçage définie dans le chapitre 2. La fréquence d'advection à l'échelle de la cellule est définie par  $f_L = \langle |U_L| \rangle / L$ . Quant à la fréquence du forçage  $f_c$ , elle est définie par  $f_c = \sqrt{F/L}$ .

Nous remarquons que ces rapports sont presque constants et de l'ordre de 3 pour  $f_{tr}/f_L$  et 4 pour  $f_{cut}/f_c$ . La fréquence  $f_{tr}$  est donc de l'ordre de l'inverse du temps de

---

<sup>1</sup>Cette moyenne se fait sur les huit portions du signal décrites par l'algorithme de la fonction *pwelch* de Matlab

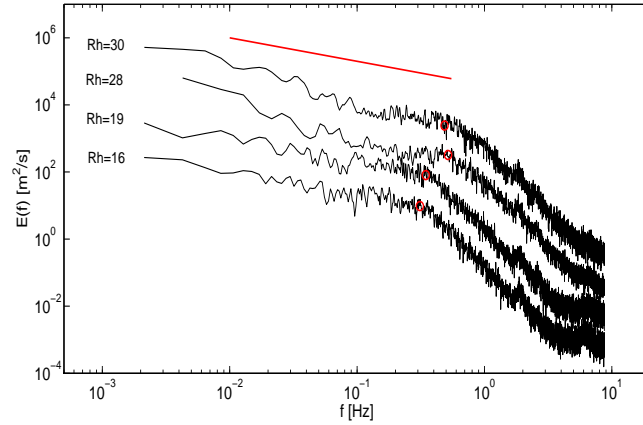


FIGURE 4.3 – Spectres temporels  $E(f)$  de  $U_L$  décalés pour  $Rh = [16, 19, 25, 30]$  (du bas vers le haut). Afin de les distinguer, ils sont multipliés par des puissances de 10 croissantes. Les ronds rouges correspondent à la transition entre le comportement à basse et haute fréquence. La droite rouge :  $f^{-0.7}$ .

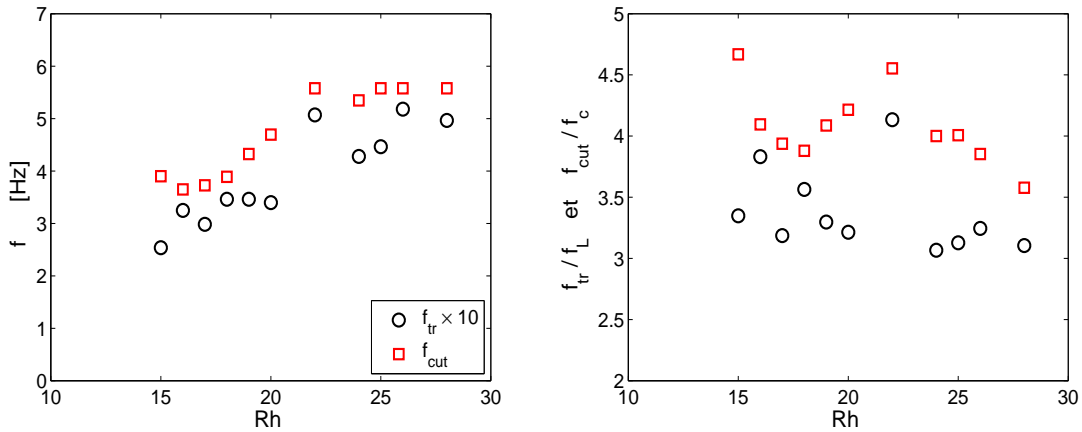


FIGURE 4.4 – Gauche :  $f_{tr}$  (carré rouge) la fréquence de transition entre les hautes et basses fréquences et  $f_{cut}$  (rond noir) la fréquence de coupure du spectre en fonction de  $Rh$ . Droite :  $f_{tr}/f_L$  et  $f_{cut}/f_c$  en fonction de  $Rh$ .

retournement de l'écoulement à l'échelle de la cellule  $f_L$  et  $f_{cut}$ , de l'ordre du temps du forçage  $f_c$ .

### La partie basse fréquence du spectre

Nous constatons que les spectres aux basses fréquences suivent une loi de puissance, comme l'indique la figure 4.5. Ces spectres semblent être parallèles à la courbe rouge définie par la fonction  $f^{-\alpha}$  avec  $\alpha = 0.7$ .

L'étude des exposants  $\alpha$ , avec  $E(f) \sim f^{-\alpha}$ , en fonction de  $Rh$  (figure 4.7) montre que  $\alpha$  est presque constant pour  $Rh$  compris entre 14 et 30 avec  $\alpha = 0.7 \pm 0.1$ . Pour confirmer cette observation, les spectres compensés par  $f^{0.7}$  sont représentés sur la figure 4.7 de droite, pour  $Rh = [16, 19, 25, 30]$ . Afin de les distinguer, ils sont multipliés

par des puissances de 10 croissantes.

Nous remarquons que pour  $Rh = 30$ , l'exposant  $\alpha = 0.7$  ne semble plus valide. En effet pour  $Rh \in [30, 45]$ , l'exposant fluctue beaucoup et varie de 1.1 à 0.8. Comme nous le verrons dans le chapitre 5, le système change de régime à  $Rh = 30$  et présente une dynamique plus cohérente, affectant ainsi l'exposant des spectres. Dans la suite de cette section, nous ne nous intéresserons qu'à la gamme de  $Rh \in [14, 20]$  où l'exposant vaut  $\alpha = 0.7 \pm 0.1$ .

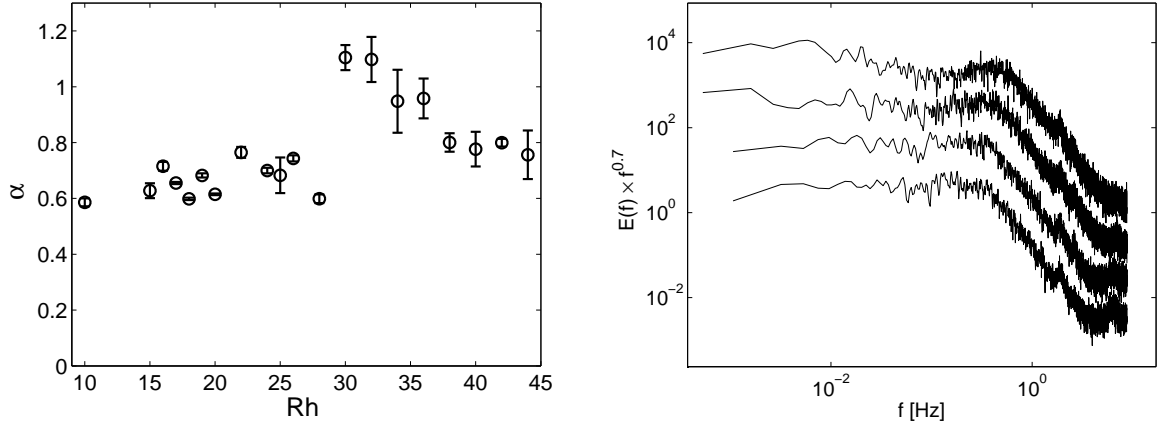


FIGURE 4.5 – Gauche : exposants  $\alpha$  du spectre  $E(f)$  de  $U_L$  aux basses fréquences tel que  $E \sim f^{-\alpha}$ , en fonction de  $Rh$ . Droite : spectres compensés avec  $E(f) \cdot f^{0.7}$  pour  $Rh = [16, 19, 25, 30]$ . Afin de les distinguer, ils sont multipliés par des puissances de 10 croissantes.

La présence d'un exposant  $\alpha$  compris entre 0.5 et 1.5 pour le spectre aux basses fréquences est associée à un phénomène connu sous le nom de spectre ou bruit en  $1/f$  [64]. Il existe une grande variété de systèmes physiques présentant un tel comportement. Dans certains cas, l'origine du spectre en  $1/f$  peut être expliquée par des transitions stochastiques du système entre plusieurs états [25, 39].

Nous nous intéresserons aux états qui correspondent aux deux sens de rotation de l'écoulement à l'échelle de la cellule, déterminées par le signe de  $U_L$ . L'écoulement à grande échelle change de sens de rotation lorsque  $U_L$  change de signe. Du fait de la symétrie du forçage, ces deux états sont a priori symétriques. Nous allons étudier le spectre du signe de  $U_L$  pour déterminer si les transitions entre les deux sens de rotation sont à l'origine du spectre en  $1/f$ .  $U_L$  se décomposant comme le produit de son signe et de sa valeur absolue  $|U_L(t)|$ , nous présenterons aussi les spectres de  $|U_L(t)|$ .

Nous avons représenté ces spectres sur la figure 4.6 pour  $Rh = 25$ . Le spectre de  $|U_L|$  est tracé en bleu, celui de  $U_L$  en noir et le spectre du signe de  $U_L$  en gris. Le spectre de  $U_L$  et celui de son signe présentent de fortes similarités aux basses fréquences et diffèrent aux hautes fréquences. Quant au spectre de  $|U_L|$ , il présente une pente plus faible aux basses et hautes fréquences.

Nous définissons  $\alpha_S$  et  $\alpha_A$  l'exposant des spectres du signe de  $U_L$  et de la valeur absolue de  $U_L$  aux basses fréquences. Ces exposants sont représentés en fonction de  $Rh$  sur la figure 4.7 de gauche, avec  $\alpha$  (rond bleu),  $\alpha_S$  (carré rouge) et  $\alpha_A$  (losange



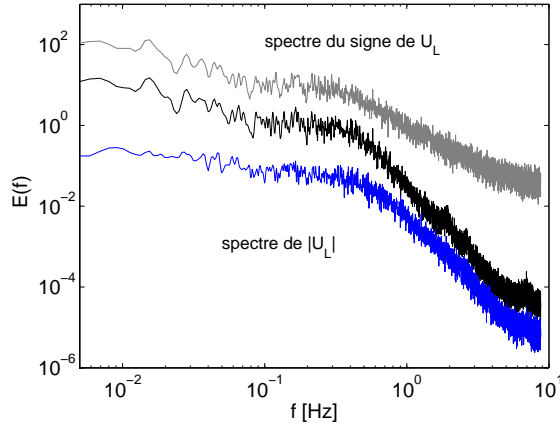


FIGURE 4.6 – En bas spectre de  $|U_L|$  en bleu, au milieu spectre de  $U_L$  en noir et en haut spectre du signe de  $U_L$  en gris, pour  $Rh = 25$ . Afin de les distinguer, ils sont multipliés par des puissances de 10 croissantes.

noir). Les exposants  $\alpha$  et  $\alpha_S$  sont presque égaux pour la plupart des points, ce qui est confirmé par le calcul du rapport  $\alpha/\alpha_S$  (rond rouge) très proche de 1 sur la figure de droite. L'exposant  $\alpha_A$  varie entre 0.4 et 0.5. Ce comportement cesse pour  $Rh > 30$  où il ne semble plus y avoir de corrélations entre les exposants  $\alpha$ ,  $\alpha_S$  et  $\alpha_A$ .

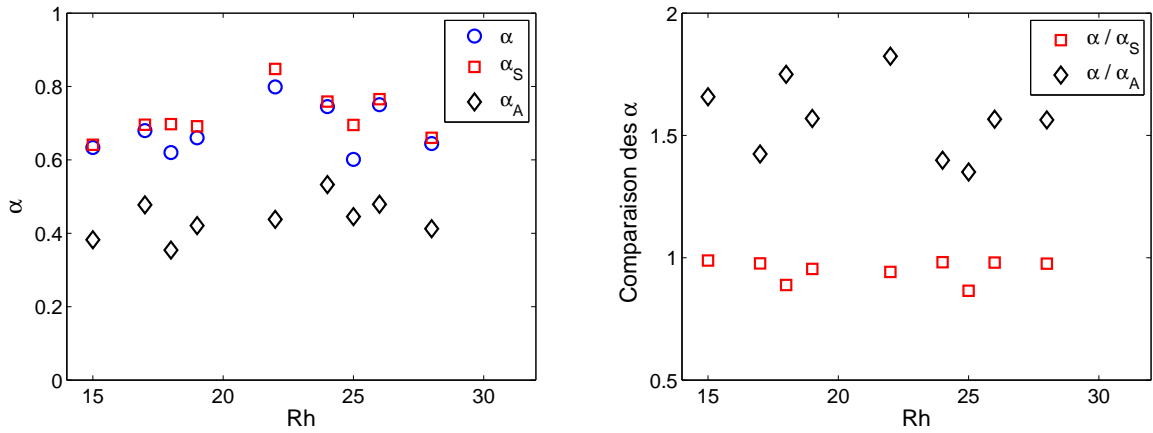


FIGURE 4.7 – Gauche :  $\alpha_S$  l'exposant du spectre du signe de  $U_L$  (carrés rouges),  $\alpha_A$  l'exposant du spectre de la valeur absolue de  $U_L$  (losanges noirs) et  $\alpha$  l'exposant du spectre de  $U_L$  (ronds bleus) pour les basses fréquences, en fonction de  $Rh$ . Droite : les rapports  $\alpha/\alpha_S$  (carrés rouges) et  $\alpha/\alpha_A$  (losanges noirs) en fonction de  $Rh$ .

### La partie haute fréquence du spectre

Les hautes fréquences du spectre correspondent à la gamme fréquentielle  $f \in [f_{tr}, f_{cut}]$ . Elles sont caractérisées par une rapide décroissance du spectre  $E(f)$ . La gamme fréquentielle étant faible (à peine une décade), il est possible d'approximer la décroissance soit par une fonction en loi de puissance avec  $E(f) \sim f^{-\gamma}$ , soit par une décroissance exponentielle avec  $E(f) \sim \exp(-\kappa f)$ .



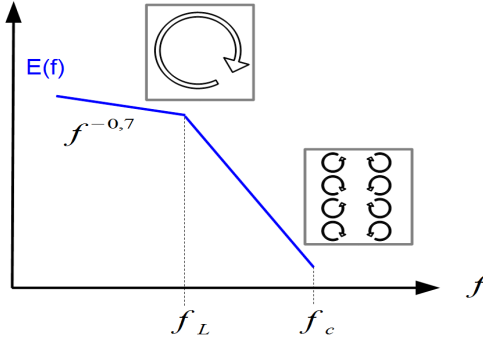


FIGURE 4.9 – Illustration de l'équivalence entre les gammes fréquentielles et les structures spatiales. La partie haute fréquence comporte la signature temporelle des structures dont la taille est comprise entre l'échelle du forçage de fréquence  $f_c$  jusqu'à l'échelle de la cellule dont la fréquence caractéristique est  $f_L = \langle |U_L| \rangle / L$ . La partie basse fréquence semble correspondre à des fréquences plus faibles que l'inverse des temps de retournement des structures dans la cellule.

## Bilan

Nous avons constaté dans cette section les quatre points suivants

- Les spectres aux basses fréquences de  $U_L$  et son signe suivent la même loi de puissance  $f^{-0.7 \pm 0.1}$  pour  $Rh < 30$ .
- Ces basses fréquences sont plus faibles que l'inverse des temps de retournement des structures présentes dans l'écoulement.
- Le spectre temporel de  $U_L$  aux hautes fréquences peut suivre soit une loi de puissance en  $f^{-4}$  soit une décroissance exponentielle  $e^{-\kappa k}$ .
- Les hautes fréquences correspondent à la signature spectrale des structures comprises entre l'échelle du forçage et de la cellule  $L$

Dans la section suivante, nous allons étudier les caractéristiques des changements de signe de  $U_L$  pour comprendre l'origine du spectre en  $1/f$ .

### 4.2.2 Distribution des durées entre changements de signe

Dans la section précédente, nous avons montré que l'origine du spectre en  $1/f$  de  $U_L$  est liée au changement de signe de  $U_L$ . Parmi les différentes propriétés statistiques du signe de  $U_L$ , nous nous intéresserons à la distribution des durées  $\tau$  entre changements de signe successifs. Nous constatons sur la figure 4.10 que la vitesse  $U_L$  change de signe sur des intervalles  $\tau$ , qui semblent varier fortement.

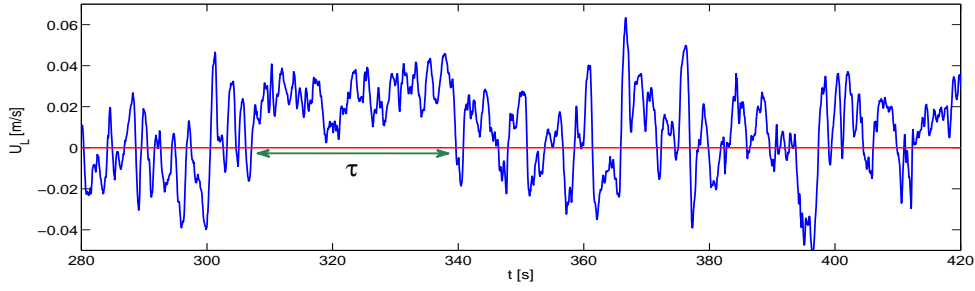


FIGURE 4.10 – Série temporelle de  $U_L$  pour  $Rh = 26$ . On définit  $\tau$  comme la durée entre deux changements de signe successifs.

On définit  $P(\tau)$  comme la distribution des durées entre deux changements de signe, où  $P(\tau)d\tau$  est la probabilité que  $U_L$  reste dans une phase de signe constant pendant une durée comprise entre  $\tau$  et  $\tau + d\tau$ .

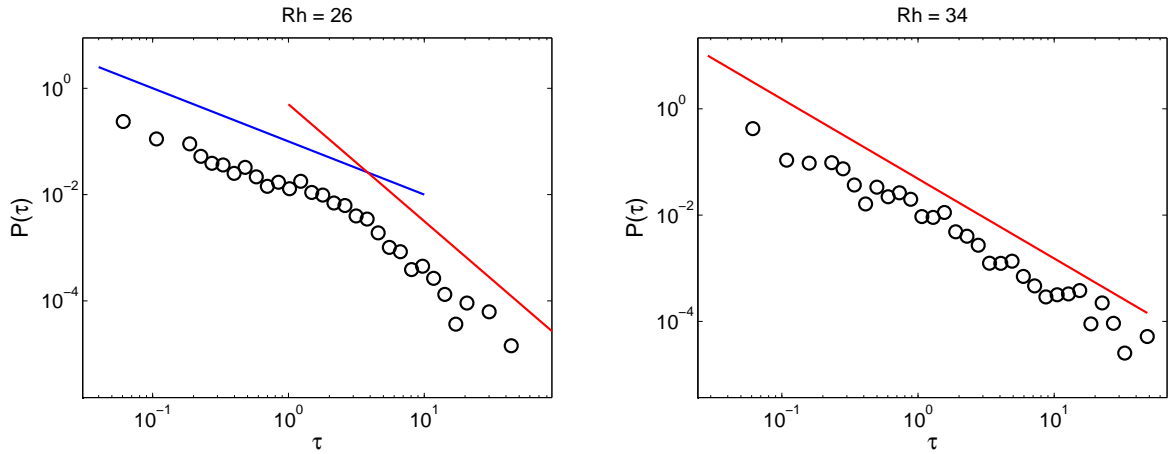


FIGURE 4.11 – Distribution des temps entre changements de signe  $P(\tau)$  pour  $Rh = 26$  à gauche et  $Rh = 34$  à droite. La droite en bleu correspond à la loi de puissance aux temps courts et en rouge celle aux temps longs. Pour  $Rh = 34$ , on a la même loi pour les temps courts et longs.

Les distributions  $P(\tau)$  pour  $Rh = 26$  et  $Rh = 34$  sont tracées sur les figure 4.11. Nous remarquons qu'elles suivent des lois de puissance distinctes selon que les temps sont courts et longs. On peut écrire  $P(\tau)$  avec  $\tau \in [\tau_i, \tau_f]$  telle que

$$P(\tau) \sim \begin{cases} \tau^{-\beta_1} & \text{pour } \tau \in [\tau_i, \tau_{tr}] \\ \tau^{-\beta_2} & \text{pour } \tau \in [\tau_{tr}, \tau_f] \end{cases} \quad (4.2)$$

Les durées  $\tau_i$  et  $\tau_f$  sont respectivement la durée la plus courte et la plus longue entre deux changements de signe.  $\tau_{tr}$  est la durée de transition entre la gamme des temps courts et celle des temps longs.  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont les exposants caractérisant le comportement de la distribution, respectivement, à bas et haut  $\tau$ .

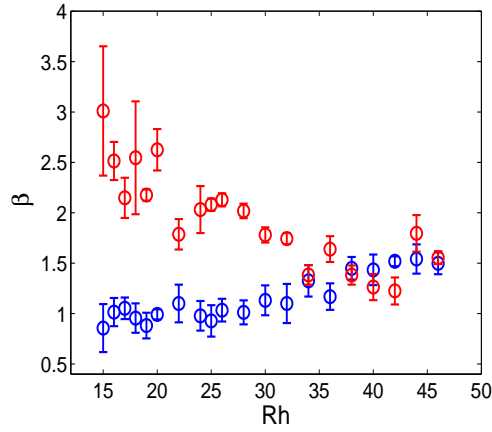


FIGURE 4.12 – Exposant des lois de puissance de  $P(\tau) \sim \tau^{-\beta}$  avec  $\beta_2$  (en rouge) pour les courtes durées entre changements de signe et  $\beta_1$  (en bleu), pour les longues durées.

Les exposants  $\beta_1$  (en bleu) et  $\beta_2$  (en rouge) sont représentés sur la figure 4.12.  $\beta_1$  varie de 0.9 pour  $Rh < 30$  à 1.6 pour  $Rh > 35$ . La variation de  $\beta_2$  est plus significative. Pour  $Rh$  plus petit que 30,  $\beta_2$  est compris entre 2 et 3. Puis pour  $Rh$  plus grand que 30,  $\beta_2$  et  $\beta_1$  sont du même ordre. Les barres d'erreurs sont importantes pour  $Rh < 30$  car elles sont calculées pour différentes gammes  $[\tau_{tr}, \tau_f]$ , et l'exposant est très sensible au choix de  $\tau_f$ .

Cependant en superposant toutes les courbes  $P(\tau)$  pour  $Rh < 30$  sur la figure 4.13 de gauche, nous constatons que la distribution suit la loi  $\tau^{-2.25}$  illustrée par la droite rouge aux temps longs.

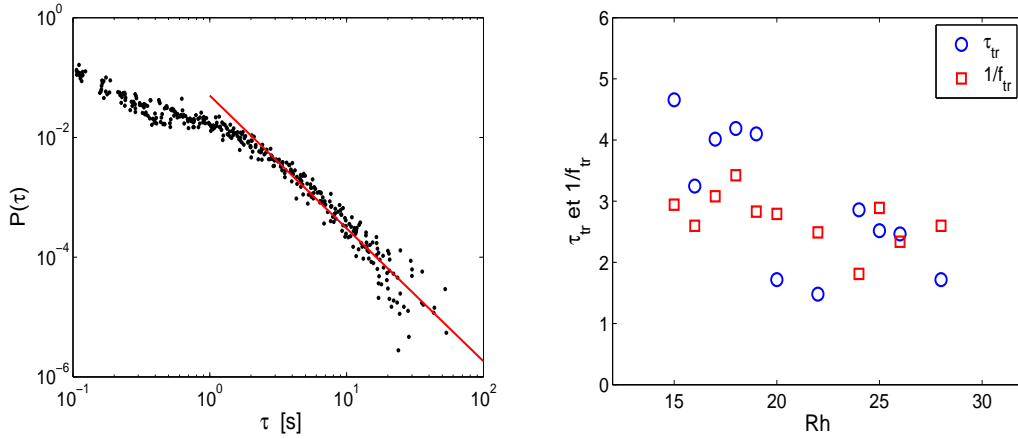


FIGURE 4.13 – Gauche : superposition des différentes distributions  $P(\tau)$  pour  $Rh \in [15 : 30]$  avec la loi de puissance en rouge  $\tau^{-2.25}$ . Droite : exposant des lois de puissance de  $P(\tau)$  aux temps longs  $\beta_2$  (en rouge) et aux temps courts  $\beta_1$  (en bleu).

Les temps  $\tau_{tr}$  de transition sont représentés sur la figure 4.13 de droite en fonction de  $Rh$ . Ces temps sont comparés à l'inverse des fréquences de transition  $f_{tr}$  entre la partie basse et haute fréquence des spectres. Nous constatons que ces temps sont du même

ordre, soit  $\tau_{tr} \approx 1/f_{tr}$ . Il semble exister une correspondance entre le comportement aux temps longs de  $P(\tau)$  et la partie basse fréquence du spectre  $E(f)$  pour  $Rh < 30$ .

Dans la suite du chapitre on confondra  $\beta$  avec  $\beta_2$  l'exposant de la distribution aux temps longs pour  $Rh < 30$ .

### 4.2.3 Comparaison entre les exposants du spectre et de la distribution

Nous avons montré dans la section précédente qu'il existe une loi d'échelle pour les longues durées de la distribution  $P(\tau)$ . Cependant le calcul de l'exposant  $\beta$  de la distribution  $P(\tau)$  est relativement sensible à la gamme choisie pour l'estimation.

Pour comparer les différents exposants sur les mêmes échelles, nous avons calculé l'exposant  $\beta$  sur la gamme temporelle  $\tau$  correspondant exactement à la gamme fréquentielle des basses fréquences du spectre, où l'exposant  $\alpha$  est calculé. Les deux exposants  $\alpha$  et  $\beta$  sont donc calculés tels que

$$\begin{cases} E(f) \sim f^{-\alpha} & \text{avec } f \in [f_{tr}, f_f] \\ P(\tau) \sim \tau^{-\beta} & \text{avec } \tau \in [f_f^{-1}, f_{tr}^{-1}] \end{cases} \quad (4.3)$$

Nous sélectionnons initialement la gamme fréquentielle sur le spectre pour l'estimation de  $\alpha$  puis nous la reportons sur la gamme temporelle pour calculer l'exposant de la distribution. Sur la figure 4.14 sont représentés en rouge les exposants  $\alpha$ , en bleu  $\beta$  et en noir leur somme  $\alpha + \beta$  pour  $Rh < 30$ .

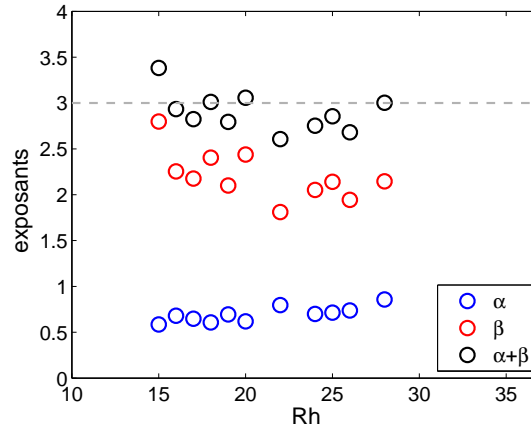


FIGURE 4.14 – Valeurs de  $\alpha$  l'exposant du spectre aux basses fréquences,  $\beta$  l'exposant de la distribution aux temps longs et  $\alpha + \beta$  en fonction de  $Rh$ .

$\beta$  est presque constant et vaut  $\beta = 2.25 \pm 0.25$ . Quant à la somme  $\beta + \alpha$ , elle fluctue autour de la valeur 3. En effet comme  $\beta \simeq 2.25$  et  $\alpha \simeq 0.7$ , la somme vaut alors  $2.9 \pm 0.35$ . Les données expérimentales indiquent qu'il existe une relation entre  $\alpha$  et  $\beta$  car leur somme est constante. Comme on le verra par la suite, lorsqu'un signal a des temps de polarité constante distribués selon  $P(\tau) \sim \tau^{-\beta}$  avec  $\beta \in [2, 3]$ , alors l'exposant du spectre est donnée par la formule  $\alpha = 3 - \beta$ . Les données expérimentales

sont donc en bon accord avec la prédiction théorique. L'étude théorique de la relation entre les changements de signe et le spectre en  $1/f$  sera développée dans la dernière section de ce chapitre.

### 4.3 Mesures par sondes Doppler ultrasoniques

#### Les mesures et le traitement

Les résultats présentés dans les sections précédentes ont été obtenus en étudiant la composante grande échelle de l'écoulement turbulent grâce à la sonde Vives. La mesure Doppler acoustique ayant une bonne résolution temporelle et spatiale (chapitre 2), nous pouvons ainsi étudier les spectres des différentes échelles spatiales.

Le profil de vitesse considéré est composé de 116 points espacés de  $0.9\text{mm}$ <sup>2</sup>. La localisation de la sonde est illustrée sur la figure 4.16 de gauche. Les points sont déterminés par l'abscisse  $\xi$  comprise entre 0 (la position de la première paroi, cf figure 4.16) et  $L' = 104.4$  millimètres (un peu avant la seconde paroi). La durée de la mesure est de  $4\text{h}30$  avec une fréquence d'acquisition de  $3.7\text{Hz}$ . La mesure présentée dans cette section a été effectuée avec  $Rh = 26$ .

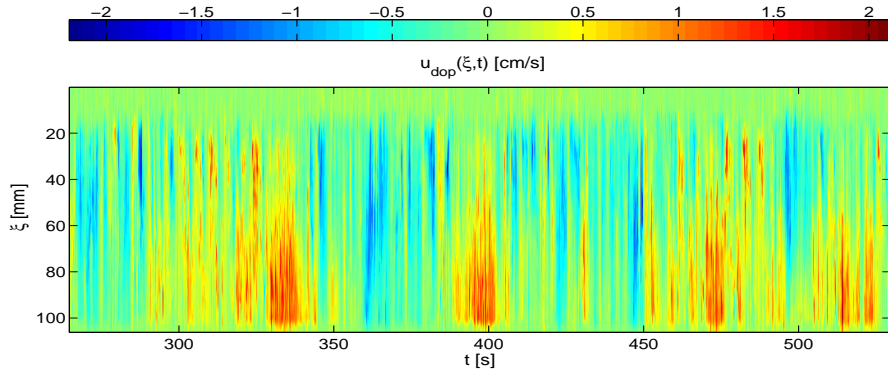


FIGURE 4.15 – Profils spatio-temporels  $u_{dop}(\xi, t)$  de la mesure Soppler pour  $Rh = 26$ .

Un échantillon du profil spatio-temporel obtenu  $u_{dop}(\xi, t)$  est représenté sur la figure 4.15. Les changements de sens de rotation de l'écoulement à grande échelle sont clairement visibles avec les alternances de bandes de couleur bleue et rouge. L'écoulement à grande échelle est quantifié par la vitesse  $U_{L'}^{dop}$ , la vitesse moyenne du profil entre  $\xi = 0$  et  $L'$  telle que

$$U_{L'}^{dop}(t) = \frac{1}{L'} \int_0^{L'} u_{dop}(\xi, t) d\xi \quad (4.4)$$

Un extrait de la série temporelle de  $U_{L'}^{dop}$  est tracé sur la figure 4.16 de droite.

---

<sup>2</sup>avec un recouvrement sur chaque mesure de  $4\text{mm}$  afin d'obtenir des mesures locales moins intermittentes

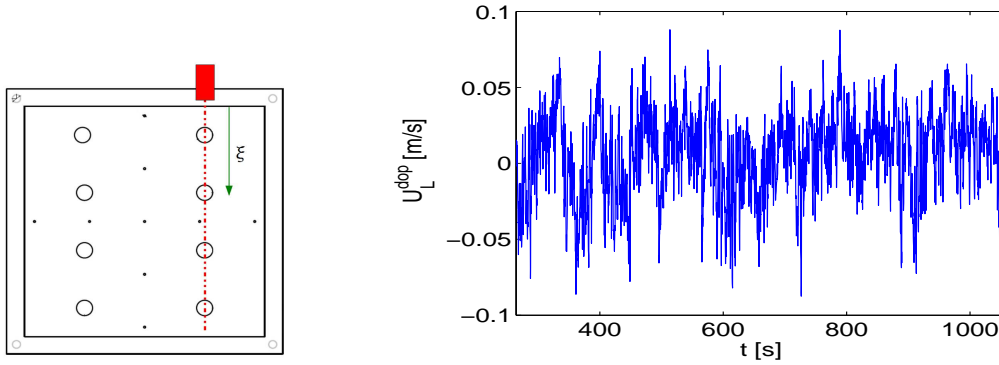


FIGURE 4.16 – A gauche : position de la sonde doppler. A droite : série temporelle de  $U_L^{dop}(t) = 1/L' \int u_{dop}(\xi, t) d\xi$  pour  $Rh = 26$ .

Nous décomposons le profil spatial en une somme de sinus (cf chapitre 2), tel que

$$u_{dop}(\xi, t) = \sum_{i=1}^{n_{modes}} \hat{u}_{dop}(n_\xi, t) \sin\left(n_\xi \xi \frac{\pi}{L'}\right) \quad (4.5)$$

Avec  $n_{modes} = N_p$  le nombre de points dans la direction  $\xi$ . Cette décomposition permet de connaître la dynamique temporelle des échelles de longueur d'onde  $L'/n_\xi$ .

### Spectres temporels des différentes échelles spatiales

Le spectre temporel de  $U_L^{dop}$  comporte sur la gamme fréquentielle  $f = [2 \cdot 10^{-2}, 1 \cdot 10^{-1}]$  Hz un spectre en  $E(f) \sim f^{-1}$  (cf figure 4.17). L'exposant diffère de celui mesuré avec les sondes Vives qui vaut  $\alpha = 0.7$ .

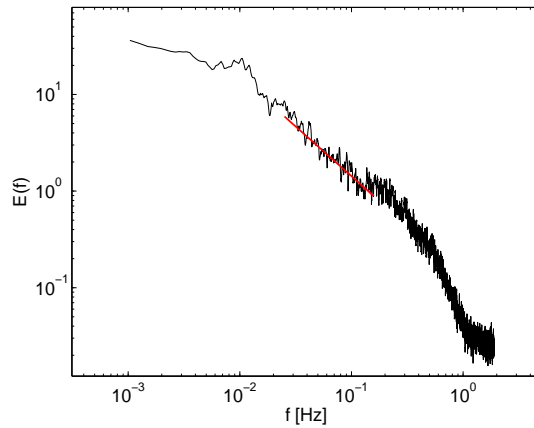


FIGURE 4.17 – Spectre temporel de  $U_L^{dop}$  avec aux basses fréquence  $E(f) \sim f^{-\alpha}$  où  $\alpha = 1$  pour  $Rh = 26$ .

Les spectres des composantes de Fourier spatiales  $\hat{u}_{dop}(n_\xi, t)$  de l'équation 4.5 comportent aussi un spectre en  $1/f$ . Sur la figure 4.18, les exposants  $\alpha$  des différentes composantes de Fourier et de leur signe,  $\alpha_S$ , varient entre  $\alpha = 0.5$  et 1.2.



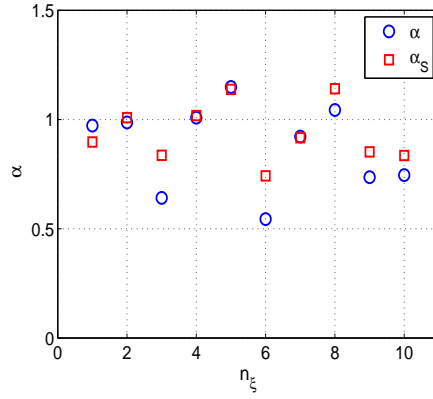


FIGURE 4.18 – Exposants  $\alpha$  (en bleu) des lois de puissances aux basses fréquences des différentes composantes de Fourier  $n_\xi$  et en rouge, exposants des spectres du signe des composantes de Fourier spatiales.

La mesure Doppler donne aussi accès aux mesures locales du signal. On calcule alors pour chaque point  $\xi$  le spectre temporel  $E(\xi, f)$  de la vitesse locale  $u_{dop}(\xi, t)$ . Le spectre local en  $\xi = 54.5 \text{ mm}$  est tracé sur la figure 4.19 de gauche. Il existe bien une loi d'échelle aux basses fréquences et  $\alpha$  (égal à 0.8).

Ce calcul est généralisé pour les différentes positions  $\xi$  sur la figure de droite (rond noir). Les losanges noirs correspondent à l'exposant du spectre du signe de  $u_{dop}(\xi, t)$ . Mis à part la région où le signal est faible ( $\xi < 2 \text{ cm}$ ), le spectre local comporte des exposants  $\alpha$  compris entre 0.7 et 1.1. Pour  $x \in [6, 10] \text{ cm}$ , le spectre local est du même ordre que celui de  $U_L^{dop}$  ( $\alpha \approx 1.1$ ) et c'est aussi sur cette gamme que les exposants  $\alpha$  et  $\alpha_S$  sont presque égaux.

Nous avons aussi vérifié que cette zone contenait le plus d'énergie en moyenne  $\langle v^2 \rangle(\xi)$ . Les propriétés spectrales de  $U_L^{dop}$  semblent être contrôlées par les propriétés locales dans la zone  $x \in [6, 10] \text{ cm}$ .

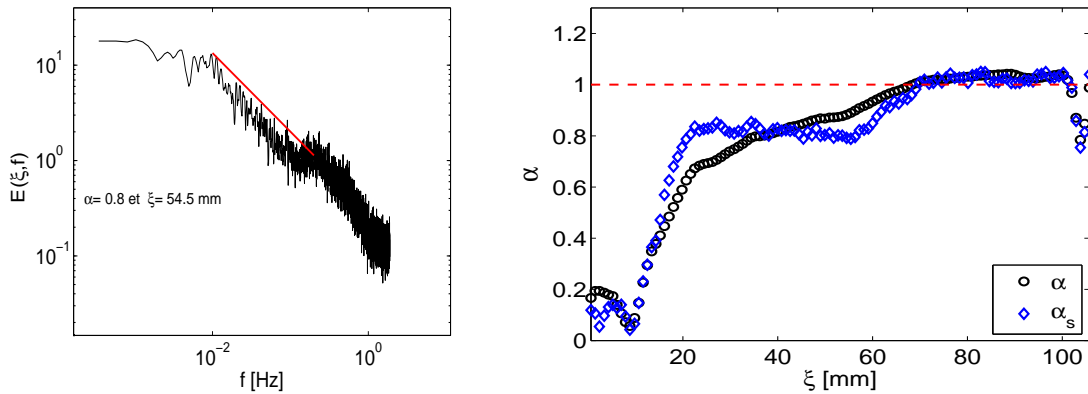


FIGURE 4.19 – À gauche spectre de  $u_x(x, t)$  avec  $\xi = 54.5 \text{ mm}$ . L'exposant vaut  $\alpha = 0.8$ . À droite  $\alpha$  (en noir) en fonction de la position  $\xi$  de la mesure, et en bleu l'exposant pour le spectre du signe de  $u_\xi(\xi, t)$ .

Nous avons donc constaté les propriétés suivantes :

- La composante grande échelle  $U_L^{dop}$  ainsi que les composantes de Fourier spatiales présentent des spectres temporels en  $1/f$ , mais avec des exposants légèrement différents compris entre 0.7 et 1.
- La mesure locale indique aussi la présence d'un spectre en  $1/f$  dont l'exposant varie selon la position  $x$  de la mesure.
- Pour toutes ces mesures, on retrouve le même exposant aux basses fréquences entre le spectre du signal et le spectre de son signe.

Les mesures obtenues grâce à la sonde Doppler ont confirmé la présence d'un spectre en  $1/f$  avec des exposants compris entre 0.7 et 1 pour des mesures locales et globales. Nous pouvons conclure que même si l'exposant diffère de celui de la mesure Vives, les exposants des spectres observés dans cette section sont également contrôlés par les changements de signe du signal.

## 4.4 Observation de structures cohérentes dans l'espace physique

Dans les précédentes sections, nous avons montré que l'origine du spectre en  $1/f$  était lié à la présence de longues phases durant lesquelles l'écoulement à grande échelle gardait le même sens de rotation. Nous allons dans cette section déterminer si ces longues phases sont associées à une structure particulière de l'écoulement.

### Présentation des résultats

Nous présentons donc l'observation d'une de ces phases grâce au champ de vitesse obtenu par le suivi de particules. Soit  $\langle u_\theta \rangle$ , la moyenne des composantes azimutales des vitesses des particules, telle que

$$\langle u_\theta \rangle(t) = \frac{1}{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} \mathbf{u}(x_i, y_i, t) \cdot \mathbf{e}_\theta \quad (4.6)$$

avec  $n_p$  le nombre de particules,  $(x_i, y_i)$  la position de la  $i$ -ème particule. Cette grandeur permet de mesurer la rotation moyenne de l'écoulement dans la cellule. La série temporelle de  $\langle u_\theta \rangle$  est représentée sur la figure 4.20 de gauche. Son amplitude varie entre  $\pm 0.05$  m/s, une vitesse du même ordre que  $U_L$ . Nous constatons que  $\langle u_\theta \rangle$  comporte aussi des phases de polarité constante de différentes durées. Dans la suite de la section, on s'intéressera plus particulièrement à la zone en rouge, qui correspond à une longue phase de 40 secondes de polarité constante comprise entre 130 et 170 secondes.

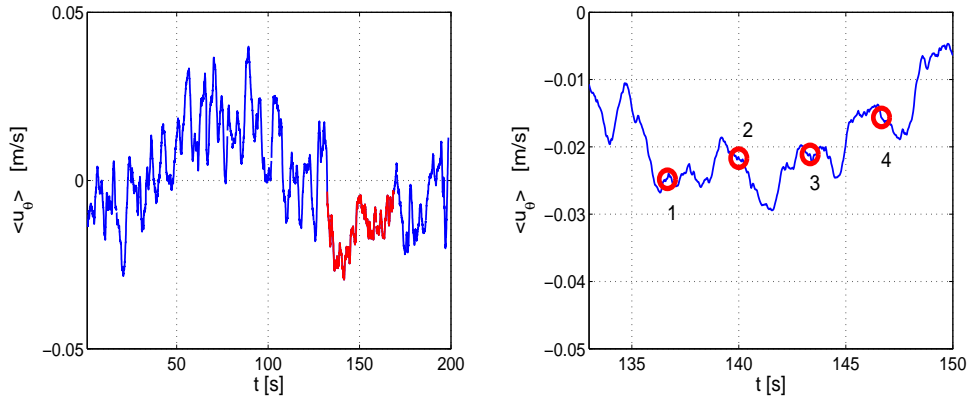


FIGURE 4.20 – Gauche : série temporelle de  $\langle u_\theta \rangle$ , la vitesse angulaire moyennée sur les particules, obtenue à partir du champ de vitesse du suivi de particules. Droite : zoom sur la portion de courbe en rouge.

Durant cette phase où l'écoulement tourne dans le sens anti-horaire, la structure du champ de vitesse va explorer différentes configurations. La figure 4.20 de droite correspond à un zoom de la phase longue, où quatre instants différents sont indiqués par des ronds rouges. Ils sont espacés de 1.6 secondes et correspondent à quatre configurations du champ de vitesse, illustrées par les figures 4.21 et 4.22. Sur la colonne de gauche, on a représenté le champ de vitesse des particules superposé au champ de vorticité. Sur la colonne de droite, on a tracé les lignes de courant de l'écoulement, correspondant à des iso-valeurs de la fonction de courant  $\psi$ . Les lignes de courant et le champ de vorticité ont été calculés à partir du champ de vitesse filtré  $\mathbf{u}_l(x, y)$  (cf chapitre 1) avec  $l = 1.12\text{cm}$ . La vorticité est exprimée en Hertz.

### Analyse des résultats

Les lignes de courant indiquent bien la présence d'un écoulement à l'échelle de la cellule, mais la structure du champ de vorticité diffère entre les différents instants. Pour les instants 1 et 2, nous constatons que l'écoulement à grande échelle est principalement constitué d'un grand tourbillon. Alors que pour l'instant 3, l'écoulement est structuré par deux tourbillons co-rotatifs par rapport à la circulation grande échelle et un central contra-rotatif, formant ainsi un trip le de tourbillons [63]. Quant à l'instant numéro 4, l'écoulement a une structure beaucoup plus complexe avec au moins trois tourbillons co-rotatifs. Tous ces tourbillons ont une vorticité grande échelle de l'ordre du Hertz, que l'on peut associer à l'inverse du temps de retournement de ces structures.

### Discussion

Nous avons montré que l' tat  $U_L < 0$  ne correspondait pas à une structure particulière de l'écoulement. Même si l'écoulement est dominé par une circulation grande échelle de signe donné, le champ de vorticité change complètement de configuration sur des durées de l'ordre du temps de retournement des vortex.

Pour faire une analogie avec la physique statistique, on peut considérer que le système explore différents micro- tats, associés à différentes configurations de vorticité,

qui correspondent à une même observable, le sens de la rotation moyenne.

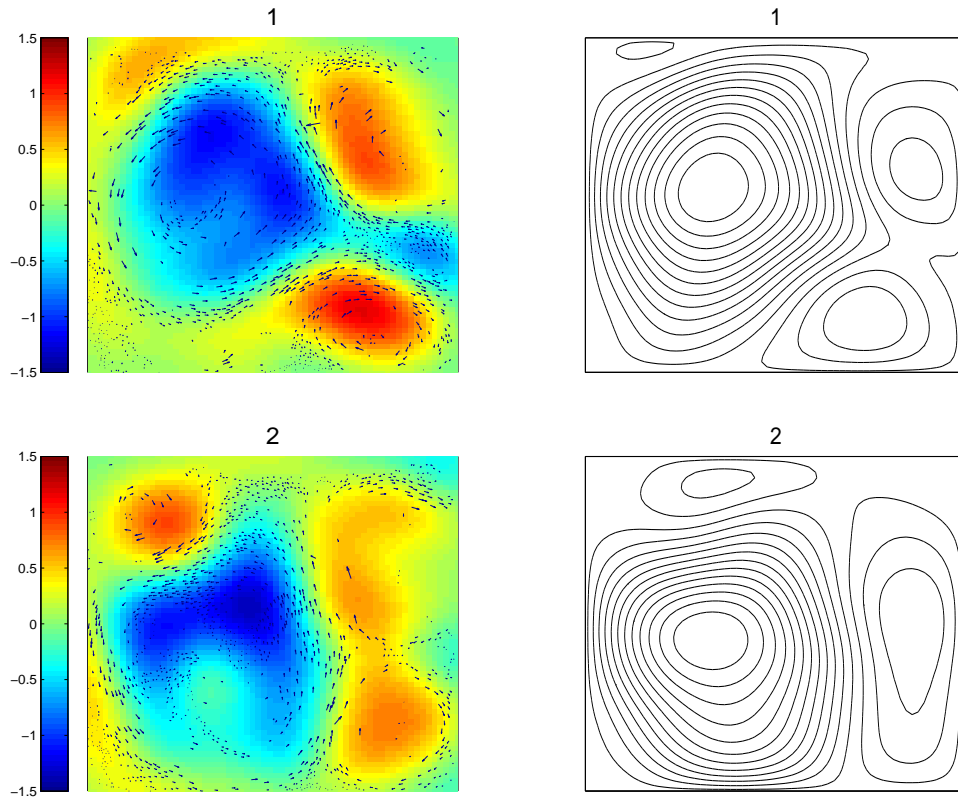


FIGURE 4.21 – Gauche : champ de vorticité à grande échelle pour différents instants de la phase de longue polarité de la figure 4.20. Droite : lignes de courant associées aux différents instants.

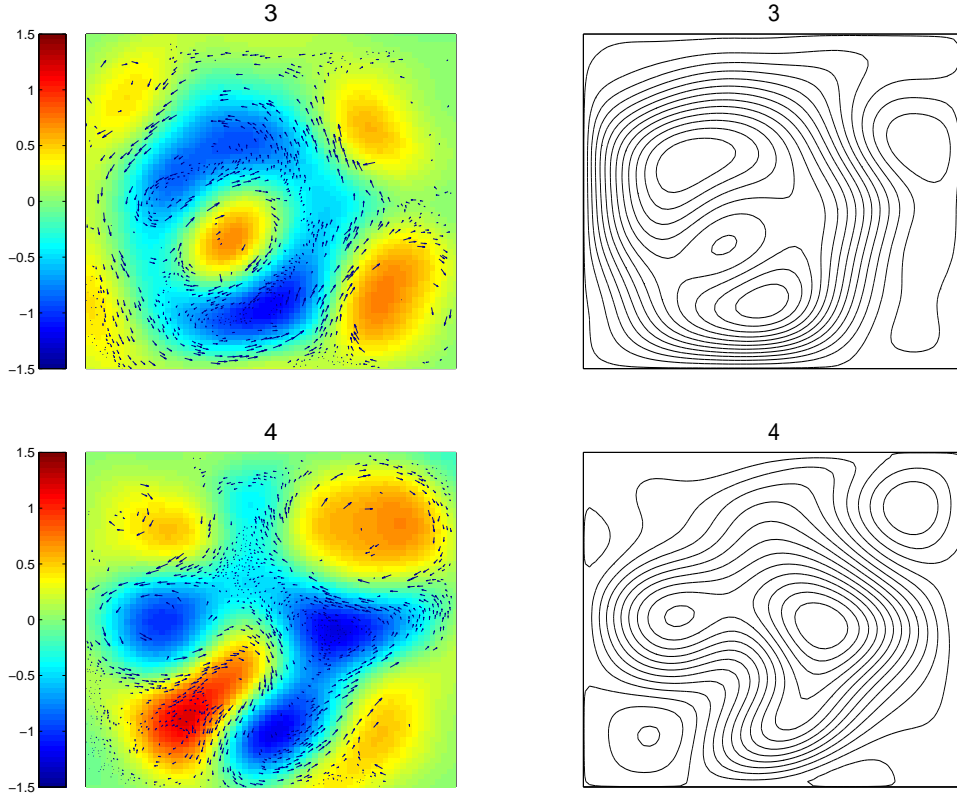


FIGURE 4.22 – Gauche : champ de vorticité à grande échelle pour différents instants de la phase de longue polarité de la figure 4.20. Droite : lignes de courant associées aux différents instants.

## 4.5 Un modèle pour les spectres en $1/f$

### 4.5.1 Introduction

Il existe une importante littérature sur les signaux présentant un spectre en  $1/f$ . Ils apparaissent dans un grand nombre de phénomènes physiques, géophysiques ou astrophysiques [6, 42, 52, 64]. Du fait de la diversité des origines physiques du bruit en  $1/f$ , il existe plusieurs théories et modèles expliquant la source de ce bruit.

Nos résultats expérimentaux ont montré que le spectre en  $1/f$  était lié aux changements de signe de la rotation moyenne dans l'écoulement. La distribution  $P(\tau)$  des durées entre deux changements de signes successifs présente une décroissance aux temps longs en loi de puissance  $P(\tau) \sim \tau^{-\beta}$  avec  $\beta = 2.25$ . De plus, la gamme temporelle associée à l'exposant  $\beta$  correspond à la gamme fréquentielle du spectre en  $1/f$ .

Le premier objectif de cette section est de comprendre le rapport entre le spectre aux basses fréquences et la distribution  $P(\tau)$ . Puis, nous nous intéresserons au mécanisme de génération d'une loi de puissance pour  $P(\tau)$  dans la prochaine section.

### 4.5.2 Discussion sur un modèle classique de bruit en $1/f$

Un des mécanismes souvent invoqué pour expliquer le bruit en  $1/f$  est la superposition de processus de relaxation [1]. Cet argument est parfois associé à la théorie de "self organised criticality" pour les systèmes hors-équilibre.

Nous considérons des systèmes qui une fois perturbés, relaxent vers l'équilibre avec un temps caractéristique  $\tau_r$ , tel que la fonction d'auto-corrélation d'une observable décroît exponentiellement

$$C(t) \sim e^{-\frac{t}{\tau_r}} \quad \text{et} \quad E(f) \sim \frac{\tau_r}{1 + 4\pi^2 f^2 \tau_r^2}, \quad (4.7)$$

ce qui implique que le spectre  $E(f)$  est une fonction lorentzienne. Le modèle repose sur l'existence d'un continuum de temps de relaxation  $\tau_r$  dans le système, tel que la probabilité de relaxer avec un temps  $\tau_r$  est donnée par la distribution  $P(\tau_r) \sim \tau_r^{-\beta_r}$ . Le système étant continuellement hors-équilibre, le spectre va comporter la contribution des différents temps de relaxation, et on estime leur contribution au spectre

$$E(f) \sim \int P(\tau_r) \left( \frac{\tau_r}{1 + 4\pi^2 f^2 \tau_r^2} \right) d\tau_r. \quad (4.8)$$

En développant puis en effectuant le changement de variable  $u = f\tau_r$ , on obtient

$$\begin{aligned} E(f) &\sim \int \frac{\tau_r^{-\beta_r+1}}{1 + 4\pi^2 f^2 \tau_r^2} d\tau_r \\ &\sim f^{\beta_r-2} \int \frac{u^{-\beta_r+1}}{1 + 4\pi^2 u^2} du. \end{aligned} \quad (4.9)$$

En posant  $E(f) \sim f^{-\alpha_r}$ , on a alors d'après l'équation 4.9, la relation suivante  $\alpha_r + \beta_r = 2$ . Or nos résultats expérimentaux diffèrent de cette prédiction, car d'après la figure 4.14, nous observons  $\alpha + \beta = 3$ . La superposition de processus de relaxation ne peut donc pas expliquer le bruit en  $1/f$  dans notre expérience.

### 4.5.3 Théorie du renouvellement et spectre en $1/f$

#### Cadre théorique et position du problème

Nous souhaitons expliquer la relation observée entre l'exposant  $\beta$  de la distribution et l'exposant  $\alpha$  du spectre de  $U_L$  et de son signe. Nous allons donc montrer l'origine de la relation  $\alpha + \beta = 3$  observée expérimentalement.

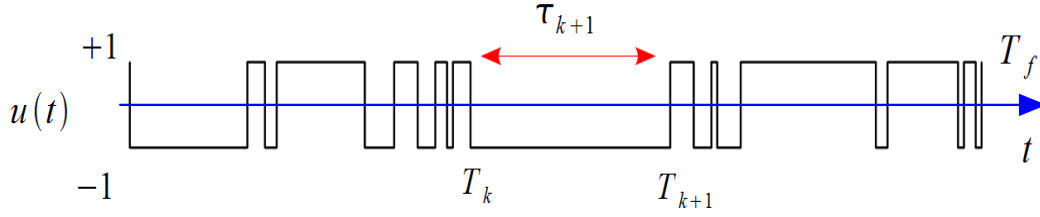


FIGURE 4.23 – Illustration du signal  $u(t)$ , la réalisation du processus de renouvellement entre les états  $\pm 1$ , où les temps d'attente  $\tau$  entre changements de signes sont distribués par  $P(\tau)$ .

L'étude des processus aléatoires constitués de séries d'événements aléatoires se nomme théorie du renouvellement. Dans notre problème, les événements correspondent à des transitions entre  $\chi = \pm 1$ , espacés par des durées  $\tau$  indépendamment distribuées selon la loi  $P(\tau)$ . À chaque réalisation de ce processus comportant  $N$  événements, est associée la série  $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)$ . Soit  $u(t)$  (cf figure 4.23), une réalisation de ce processus valant  $\chi_k = \pm 1$  pendant la  $k$ -ième polarité telle que

$$u(t) = \chi_k \quad \text{avec} \quad t \in I_k = [T_k, T_{k+1}] \quad \text{où} \quad T_k = \sum_{i=1}^k \tau_i \quad (4.10)$$

et  $\chi_{k+1} = -\chi_k$ . On s'intéressera aux distributions  $P(\tau)$  telles que pour  $\tau > \tau_c$ ,  $P(\tau)$  suit une loi de puissance  $\tau^{-\beta}$  avec  $\beta > 2$ , pour que le moment d'ordre 1 de la distribution  $P(\tau)$  soit défini. Nous souhaitons donc calculer le spectre  $E(f)$  de  $u(t)$ .

### Calcul du spectre par arguments qualitatifs

Nous présentons ici un calcul du spectre à partir d'arguments qualitatifs. Une démonstration plus complète est présentée dans l'article de Niemann *et al.* [48]. Notre démonstration vise à montrer que la fonction d'auto-corrélation temporelle  $C(t)$  de  $u(t)$  admet une décroissance en loi de puissance, due à la présence d'événements longs. Puis nous calculerons le spectre à partir de la fonction de corrélation grâce au théorème de Wiener-Khintchine

$$E(f) = \int C(t) \exp(i\omega t) dt \quad (4.11)$$

avec  $C(t)$  la fonction d'auto-corrélation temporelle du signal  $u(t)$  définie par

$$C(t) = \frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} u(t' + t) u(t') dt' \quad (4.12)$$

avec  $T_f$ , la durée du signal. Pour  $t = 0$ , l'auto-corrélation vaut 1 car le produit  $u(t' + t)u(t')$  est égal à 1 sur tout le domaine. L'intégrale vaut alors  $T_f$ . Pour  $t > 0$ , ce produit vaut

$$u(t' + t)u(t') = \chi_k \chi_l \quad (4.13)$$

où les indices  $l$  et  $k$  correspondent aux phases avec  $t' \in T_l$  et  $t' + t \in T_k$ . L'auto-corrélation décroît pour  $t > 0$  à cause des contributions négatives des phases  $l$  et  $k$ , telles que  $\chi_k \chi_l = -1$ .

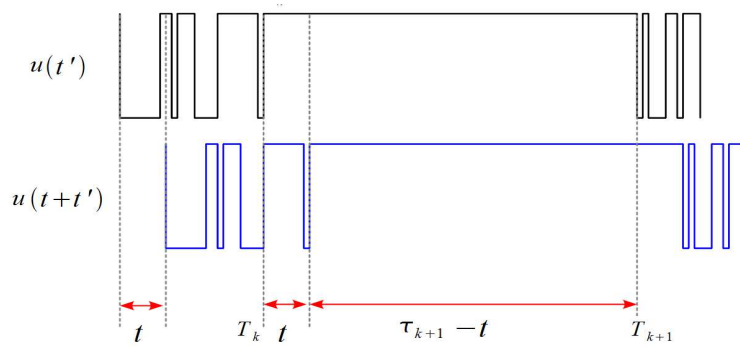


FIGURE 4.24 – Schéma illustrant le calcul de l'auto-corrélation. Pour  $t$  grand, seuls les phases de polarité constante telles que  $\tau > t$ , vont contribuer positivement à l'auto-corrélation, le reste se moyennant à zéro. La contribution des ces évènements est pondérée par  $\tau - t$ .

Nous souhaitons calculer l'auto-corrélation en passant du domaine temporel à l'espace des réalisations en supposant que le système est ergodique. Nous allons donc estimer la contribution des phases de durée  $\tau$  de probabilité  $P(\tau)$  à la fonction d'auto-corrélation.

Nous estimons que les phases  $\tau < t$  ne contribuent pas à l'auto-corrélation car le produit  $u(t')u(t'+t)$  doit être de moyenne nulle sur toutes les phases de durée  $\tau < t$ . Nous considérons donc seulement les phases de durée  $\tau > t$ , car le produit  $u(t)u(t+t')$  reste égal à un pendant une durée égale à  $\tau - t$  (cf figure 4.24).

L'auto-corrélation est donc dominée par la contribution des phases de durée  $\tau > t$  pondérée par la durée  $t - \tau$ , soit

$$C(t) \simeq \frac{1}{T_f} \int_t^{T_f} (\tau - t) n(\tau) d\tau \quad \text{pour } 1 \ll t \ll T_f, \quad (4.14)$$

où  $t \ll T_f$  et  $n(\tau)$  le nombre de phases de durée  $\tau$ . Le nombre  $n(\tau)$  est égal au nombre total  $N$  de changements de signe pendant le temps  $T_f$ , multiplié par la distribution  $P(\tau)$ . On sait que  $N$  est égal à la durée de la mesure  $T_f$  divisée par le temps moyen  $\langle \tau \rangle$  qui est fini pour  $\beta > 2$ . Ainsi

$$\begin{aligned} C(t) &\simeq \frac{1}{T_f} \int_t^{T_f} (\tau - t) \frac{T_f}{\langle \tau \rangle} P(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\langle \tau \rangle} \int_t^{T_f} (\tau - t) P(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dans la suite, on considère  $T_f$  très grand et nous étendons l'intégrale à  $T_f = \infty$ . La distribution  $P(\tau)$  n'a pas encore été spécifiée. Pour vérifier cette formule, prenons un cas test. Si on suppose que la loi est Poissonnienne telle que  $P(\tau) = \lambda \exp(-\lambda \tau)$ , alors



$$\begin{aligned}
C(t) &= \frac{1}{\langle \tau \rangle} \int_t^\infty (\tau - t) \lambda \exp(-\lambda t) d\tau \\
&= \exp(-\lambda t) \int_0^\infty u \exp(-u) du
\end{aligned} \tag{4.16}$$

avec le changement de variable  $u = \lambda(\tau - t)$ . On retrouve bien la décroissance exponentielle associée à la loi de Poisson. Posons maintenant  $P(\tau) = K\tau^{-\beta}$  avec  $K$  une constante de renormalisation. L'équation 4.15 est alors égale à

$$C(t) = \frac{K}{\langle \tau \rangle} \int_t^\infty (\tau - t) \tau^{-\beta} d\tau \tag{4.17}$$

L'intégration de ce polynôme donne

$$C(t) = \frac{K}{\langle \tau \rangle} \left( \frac{1}{\beta - 2} + \frac{1}{\beta - 1} \right) t^{2-\beta} \tag{4.18}$$

Nous retiendrons que l'auto-corrélation décroît en  $t^{2-\beta}$ . Ce calcul permet de montrer que ce sont les événements rares qui contribuent essentiellement à l'auto-corrélation aux temps longs. Quant au spectre, on a par le théorème de Wiener-Khintchine

$$\begin{aligned}
E(f) &= \int C(t) \exp(i2\pi ft) dt \\
&\sim \int t^{2-\beta} \exp(i2\pi ft) dt \\
&\sim f^{\beta-3} \int u^{2-\beta} \exp(i2\pi u) du
\end{aligned} \tag{4.19}$$

avec le changement de variable  $u = f \cdot t$ . On retrouve bien la relation suivante entre l'exposant  $\beta$  de la distribution et  $\alpha$  du spectre

$$\alpha + \beta = 3 \quad \text{pour } 2 < \beta < 3. \tag{4.20}$$

Nous n'avons considéré que le cas où  $\beta > 2$ . Ce résultat est néanmoins valide pour  $1 < \beta < 2$  mais nécessite un calcul plus complexe [48].

## 4.6 Un modèle de processus stochastique pour la distribution $P(\tau)$

### 4.6.1 Introduction

Dans les précédentes sections, nous avons montré que l'exposant  $\alpha$  du spectre était contrôlé par l'exposant  $\beta$  de la distribution  $P(\tau)$ . Il reste donc à déterminer l'origine de la loi de puissance de  $P(\tau)$ . Il existe un grand nombre de modèles pouvant engendrer un tel comportement et nous nous focaliserons dans cette section sur la modélisation

de ces changements de signe par un processus stochastique de renouvellement entre deux états.

Considérons un espace des phases scindé en deux parties : un attracteur  $A$ , correspondant à la valeur  $u = +1$ , et un attracteur  $B$  correspondant à la valeur  $u = -1$ . Le système peut passer de l'attracteur  $A$  à  $B$  avec une probabilité  $\Gamma_{A \rightarrow B}(\tau)$  sachant qu'il est dans l'attracteur  $A$  depuis un temps  $\tau$  et réciproquement pour  $\Gamma_{B \rightarrow A}(\tau)$ . Par commodité, on pose  $\Gamma(\tau) = \Gamma_{A \rightarrow B}(\tau)$  et  $\Gamma'(\tau) = \Gamma_{B \rightarrow A}(\tau)$ . On suppose  $\Gamma$  continue en  $\tau$ . La probabilité pour que le système dans l'attracteur  $A$  à l'instant  $t$  y soit encore à un instant  $t + dt$  sachant qu'il y est depuis une durée  $\tau$  est alors égale à  $1 - \Gamma(\tau)d\tau$ .

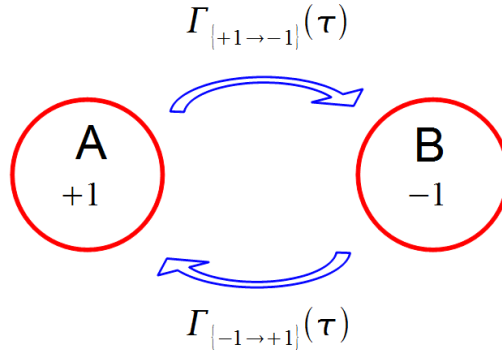


FIGURE 4.25 – Schéma du processus stochastique de transition entre deux états  $A$  et  $B$ .

Les transitions successives vont engendrer la fonction  $u(t)$  avec des durées  $\tau$  dans chaque polarité distribuées aléatoirement et de manière indépendante. Dans les prochaines sections, nous allons développer le modèle mathématique qui permet de relier  $\Gamma(\tau)$  à la probabilité  $P(\tau)$  de rester pendant un temps total  $\tau$  dans une polarité.

#### 4.6.2 L'équation maîtresse

Dans cette section, nous allons montrer comment la fonction  $\Gamma(\tau)$  qui définit le processus stochastique, détermine la loi  $P(\tau)$ . Nous considérons  $\Gamma(\tau)$  et  $\Gamma'(\tau)$  égales, c'est à dire que la probabilité de transiter de l'attracteur  $A$  vers  $B$  est la même que celle de transiter de  $B$  vers  $A$ .

Nous définissons la fonction  $f(\tau)$  comme la probabilité de rester dans un attracteur pendant au moins une durée  $\tau$ . Cette fonction est liée à la loi  $P(\tau)$  par

$$P(\tau)d\tau = f(\tau) - f(\tau + d\tau) \quad \text{soit} \quad P(\tau) = -\frac{df}{d\tau} . \quad (4.21)$$

La probabilité  $P(\tau)d\tau$  de rester pendant une durée totale  $\tau$  dans un attracteur est égale à la différence entre la probabilité de rester au moins un temps  $\tau$  et celle de rester au moins un temps  $\tau + d\tau$  dans l'attracteur. En passant à la limite, on obtient le second terme de l'équation qui définit  $P(\tau)$  comme l'opposée de la dérivée de  $f(\tau)$ .

Nous allons poser l'équation maîtresse, qui lie  $f(\tau + d\tau)$  à  $f(\tau)$ . Ainsi la probabilité  $f(\tau + d\tau)$  est égale à la probabilité d'être dans l'attracteur depuis au moins une durée

$\tau$ , multipliée par la probabilité d'y rester sachant que le système y est depuis une durée  $\tau$ . La probabilité de rester dans l'attracteur valant  $1 - \Gamma(\tau)d\tau$ ,  $f(\tau + d\tau)$  est donnée par

$$f(\tau + d\tau) = f(\tau) [1 - \Gamma(\tau)d\tau] \quad (4.22)$$

En passant à la limite  $d\tau \rightarrow 0$ , on a l'équation différentielle suivante

$$\frac{df(\tau)}{d\tau} = -\Gamma(\tau)f(\tau) \quad (4.23)$$

Les solutions sont donc de la forme

$$f(\tau) = \exp \left( - \int_0^\tau \Gamma(\tau') d\tau' \right) \quad (4.24)$$

avec comme condition  $f(0) = 1$ . En combinant les équations 4.21 et 4.23 et en utilisant l'équation ci-dessus, nous pouvons calculer  $P(\tau)$  en fonction de  $\Gamma(\tau)$

$$\begin{aligned} P_A(\tau) &= \Gamma(\tau)f(\tau) \\ &= \Gamma(\tau) \exp \left( - \int_0^\tau \Gamma(\tau') d\tau' \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Supposons que le processus soit markovien avec  $\Gamma$  une constante. Cette configuration correspond à un processus de Poisson où la probabilité de transiter est indépendante du temps. On a alors le résultat suivant

$$P(\tau) = \Gamma \exp(-\Gamma\tau). \quad (4.26)$$

On a montré dans la section précédente que cette distribution est associée à une fonction d'auto-corrélation exponentielle, dont le spectre est donné par une fonction lorentzienne. Il est donc nécessaire d'introduire un effet mémoire pour obtenir une distribution en loi de puissance.

### 4.6.3 Processus non-markovien : $\Gamma$ dépendant du temps

Nous allons utiliser un modèle classique [68] de taux de transition  $\Gamma(\tau)$  dépendant du temps

$$\Gamma(\tau) = \frac{\nu}{\theta + \tau}, \quad (4.27)$$

avec  $\nu > 0$  et  $\theta$  un temps caractéristique pour que  $\Gamma$  ne diverge pas en  $\tau = 0$ . La probabilité de transiter  $\Gamma(\tau)d\tau$  décroît dans le temps : plus le système reste longtemps dans l'attracteur, plus faible est la probabilité de s'en échapper. Ce mécanisme permet d'engendrer des événements longs. Ainsi la primitive de  $\Gamma$  est

$$\int_0^\tau \Gamma(\tau') d\tau' = \int_0^\tau \frac{\nu}{\theta + \tau'} d\tau' = -\ln \left[ \left( \frac{\theta}{\theta + \tau} \right)^\nu \right]. \quad (4.28)$$

Même si le taux  $\Gamma(\tau)$  tend vers 0 aux temps longs, la probabilité que le système se soit renversé au bout d'un temps  $\tau$  augmente donc comme le logarithme de  $\tau$ . Finalement, grâce à l'équation 4.24,  $f$  vaut

$$f(\tau) = \left( \frac{\theta}{\theta + \tau} \right)^\nu \quad (4.29)$$

Quant à  $P(\tau)$

$$P(\tau) = \Gamma(\tau)f(\tau) = \nu\theta^\nu (\theta + \tau)^{-(\nu+1)} \quad (4.30)$$

On a donc une loi de puissance  $P(\tau) \sim \tau^{-\beta}$  pour  $\tau \gg \theta$  telle que  $\beta = \nu + 1$ . Le processus de renouvellement, associé à une probabilité de transition déterminée par l'équation 4.27, engendre une distribution de changements de signe avec un exposant  $\beta \in ]1, 3[$  si  $\nu \in ]0, 2[$ .

#### 4.6.4 Simulations du processus stochastique non-markovien

##### Présentation de la simulation

Nous allons présenter l'algorithme permettant de simuler le processus stochastique présenté précédemment. Soit  $\eta$  une variable aléatoire dont la valeur est donnée par une loi uniforme entre 0 et 1. Les tirages sont indépendants. Le système reste dans l'attracteur  $A$ , avec  $u(t) = 1$ , sachant qu'il y est depuis une durée  $\tau$ , si

$$\eta > \Gamma(\tau)dt \quad \text{avec} \quad \Gamma(\tau) = \frac{\nu}{\theta + \tau} \quad (4.31)$$

Ainsi si le système reste dans l'attracteur, un nouveau tirage  $\eta$  est réalisé avec une nouvelle probabilité de transition valant  $\Gamma(\tau + dt)$ . Ainsi de suite tant que l'inégalité est vérifiée. Dans le cas contraire, la durée  $\tau$  est réinitialisée à zéro ; le système passe de  $A$  à  $B$  et  $u(t + dt) = -u(t)$ . Cet algorithme engendre ainsi la série temporelle  $u(t)$ . Considérons le cas général, où le système n'est pas symétrique entre l'attracteur  $A$  et  $B$ , soit

$$\Gamma(\tau) = \frac{\nu_1}{\theta + \tau} \quad \text{et} \quad \Gamma'(\tau) = \frac{\nu_2}{\theta + \tau}, \quad (4.32)$$

avec  $\nu_1$  et  $\nu_2$  à priori différents et  $\theta$  identique dans les deux cas. Nous allons considérer les trois cas suivants dans la suite

- Le cas symétrique où  $\nu_1 = \nu_2$ .
- Le cas faiblement dissymétrique  $\nu_1 < \nu_2$ .
- Le cas fortement dissymétrique  $\nu_1 \ll \nu_2$ .

### Cas symétrique $\nu_1 = \nu_2$

Dans le cas symétrique, on pose  $\nu$  égal à  $\nu_1$  et  $\nu_2$ .  $\theta$  est fixé à  $10^{-1}$ , le pas de temps  $dt$  à  $10^{-2}$  et  $\nu$  varie de 0.5 à 2.5. La durée de la série temporelle est fixée à  $T_f = 5 \cdot 10^3$ , c'est à dire qu'il y a  $5 \cdot 10^5$  pas de temps. On calcule ensuite le spectre et la distribution des temps dans chaque polarité à partir de la série temporelle  $u(t)$ . Cet algorithme est répété typiquement 1000 fois afin de converger le spectre et la distribution (cf figure 4.26).

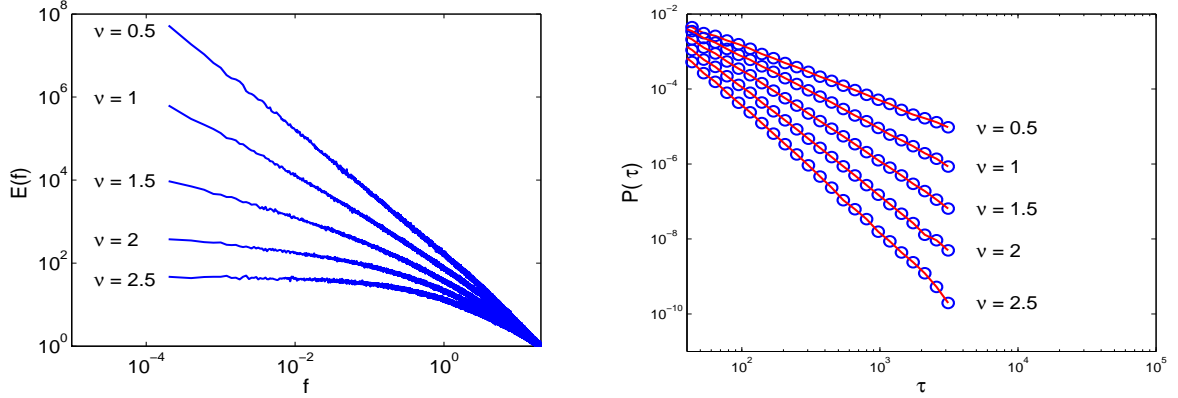


FIGURE 4.26 – Gauche : spectres obtenus dans le cas symétrique  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ . Droite : distributions des durées entre changements de signe pour les mêmes paramètres de la figure de gauche.

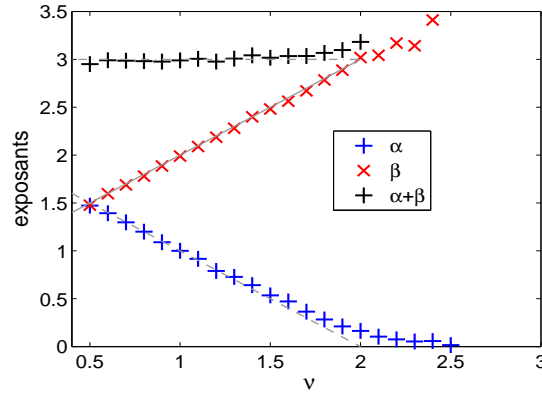


FIGURE 4.27 – Exposants  $\alpha$  des spectres (en bleu), tels que  $E(f) \sim f^{-\alpha}$ , exposants  $\beta$  des distributions (en rouge), tels que  $P(\tau) \sim \tau^{-\beta}$  en fonction de  $\nu$ . La somme  $\alpha + \beta$  des deux exposants (en noir) est constante et vaut 3 pour  $\nu \in [0.5, 2[$ .

Les résultats des simulations du processus stochastique sont présentés sur la figure 4.27. On définit  $\alpha$  l'exposant des spectres, tels que  $E(f) \sim f^{-\alpha}$ , et  $\beta$  l'exposant des distributions, telles que  $P(\tau) \sim \tau^{-\beta}$ . Les exposants  $\alpha$  (en bleu),  $\beta$  (en rouge) et leur somme  $\alpha + \beta$  (en noir) sont représentés en fonction de  $\nu$  sur la figure 4.27. La figure montre bien l'accord avec la théorie avec  $\beta = \nu + 1$ , pour  $0.5 < \nu < 2$  correspondant à  $1.5 < \beta < 3$ .

Quant aux exposants  $\alpha$ , ils suivent bien la relation  $\alpha = 2 - \nu$  ou  $\alpha + \beta = 3$  pour  $\nu < 2$ . Très proche du point  $\nu = 2$ ,  $\alpha$  est légèrement supérieur à la valeur théorique. En effet, en  $\nu = 2$  et  $\beta = 3$ , le spectre ne suit pas une loi de puissance [38] mais décroît comme le logarithme de  $f$ , c'est à dire

$$E(f) \sim -\log(f\theta) \quad (4.33)$$

Sur la figure 4.28, le spectre  $E(f)$  pour  $\nu = 2$  est divisé par  $-\log(f\theta)$ . Nous constatons que sur au moins deux décades la courbe est plate, validant ainsi la formule 4.33. Ainsi dans la limite  $\nu$  plus petit et tendant vers 2, la convergence demande un grand nombre de réalisations.

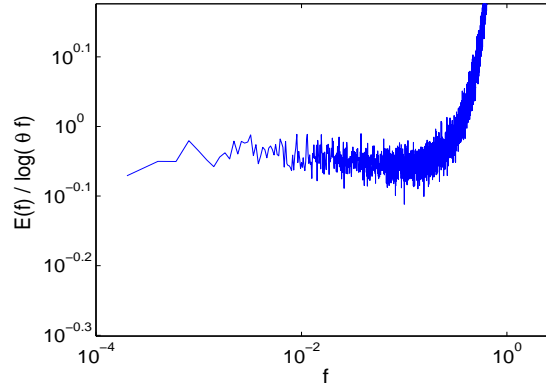


FIGURE 4.28 – Spectre  $E(f)$  compensé par  $-\log(\theta f)$  pour  $\nu = 2$  dans le cas symétrique.

### Cas dissymétrique

Nous allons nous intéresser à l'effet d'une dissymétrie sur les transitions entre les attracteurs  $A$  et  $B$ . Nous définissons la probabilité de transition de l'attracteur  $A$  vers  $B$  (resp de  $B$  vers  $A$ ) telle que

$$\Gamma_{\{A \rightarrow B\}}(\tau) = \frac{\nu_1}{\theta + \tau} \quad \text{et} \quad \Gamma_{\{B \rightarrow A\}}(\tau) = \frac{\nu_2}{\theta + \tau}. \quad (4.34)$$

avec  $\nu_1$  et  $\nu_2$  à priori différents.  $\theta$  est identique pour les deux probabilités de transition et fixé à  $10^{-1}$ . Nous avons vérifié que la propriété  $\beta = \nu + 1$  était toujours valide. La probabilité  $P_A(\tau)$  (respectivement  $P_B(\tau)$ ) de rester dans l'attracteur  $A$  (resp.  $B$ ) varie comme

$$P_A(\tau) \sim \tau^{-(\nu_1+1)} \quad \text{et} \quad P_B(\tau) \sim \tau^{-(\nu_2+1)} \quad (4.35)$$

Dans la suite de cette section, nous utiliserons uniquement les variables  $\beta_1$ , égale à  $\nu_1 + 1$ , et  $\beta_2$ , égale à  $\nu_2 + 1$ .

Un extrait de la série temporelle  $u(t)$  avec  $\beta_1 = 1.5$  et  $\beta_2 = 3$  est représenté sur la figure 4.29 de droite. Nous remarquons que le système passe la majeure partie du temps dans l'état  $u = 1$  du fait de sa faible probabilité de transiter de  $A$  vers  $B$ .

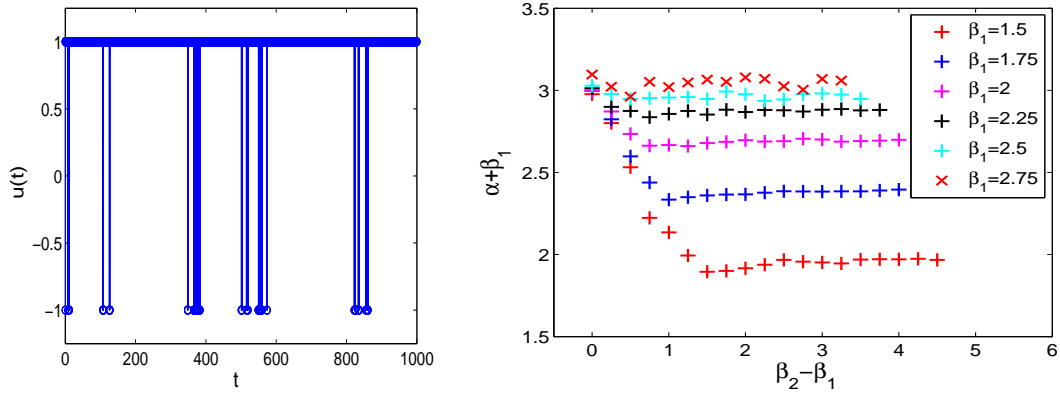


FIGURE 4.29 – Gauche : série temporelle de  $u(t)$  dans le cas  $\beta_1 = 1.5$  et  $\beta_2 = 2$ . Droite :  $\alpha + \beta_1$  en fonction de  $\beta_2 - \beta_1$ . Chaque couleur correspond à une série de simulations où  $\beta_1$  est constant, et  $\beta_2$  varie de 1.5 à 6.

Les résultats du calcul des exposants  $\alpha$  sont présentés sur la figure 4.29 de droite. Nous avons représenté  $\alpha + \beta_1$  en fonction de  $\beta_2 - \beta_1$  pour observer l'effet de la dissymétrie. Le cas symétrique correspond à l'abscisse  $\beta_2 - \beta_1 = 0$  et à l'ordonnée  $\alpha + \beta_1 = 3$ . Les symboles de couleur correspondent à une série de simulations où  $\beta_1$  est constant, et  $\beta_2$  varie de 1.5 à 6. Il y a 6 séries de mesures avec  $\beta_1$  variant de 1.5 à 2.75. Nous constatons que pour  $\beta_1 > 2$ , la relation  $\alpha + \beta = 3$  semble toujours valide. Pour  $\beta_1 < 2$ , l'exposant  $\alpha$  s'écarte de la prédiction  $\alpha = 3 - \beta$  et décroît pour atteindre une valeur constante dans la limite  $\beta_2$  grand devant  $\beta_1$ .

Ainsi lorsque  $\beta_1 < 2$ , la présence d'une dissymétrie change la relation entre  $\alpha$  et  $\beta$ . Dans la prochaine section, nous étudierons la limite  $\beta_1 \ll \beta_2$ .

### Cas fortement dissymétrique

Nous présentons dans cette partie, le cas limite où  $\beta_2$  est arbitrairement grand et fixé à 21, tandis que  $\beta_1$  varie entre 1 et 3. Le système fait alors des excursions très brèves dans l'attracteur  $B$ . Les exposants  $\alpha$  (en bleu) calculés sont représentés sur la figure 4.30 de gauche. Nous observons deux comportements différents : pour  $\beta_1 < 2$ ,  $\alpha$  est une fonction croissante de  $\beta_1$ , et pour  $\beta_1 > 2$ ,  $\alpha$  est une fonction décroissante de  $\beta_1$  et suit la relation  $\alpha = 3 - \beta$  du cas symétrique (en rouge).

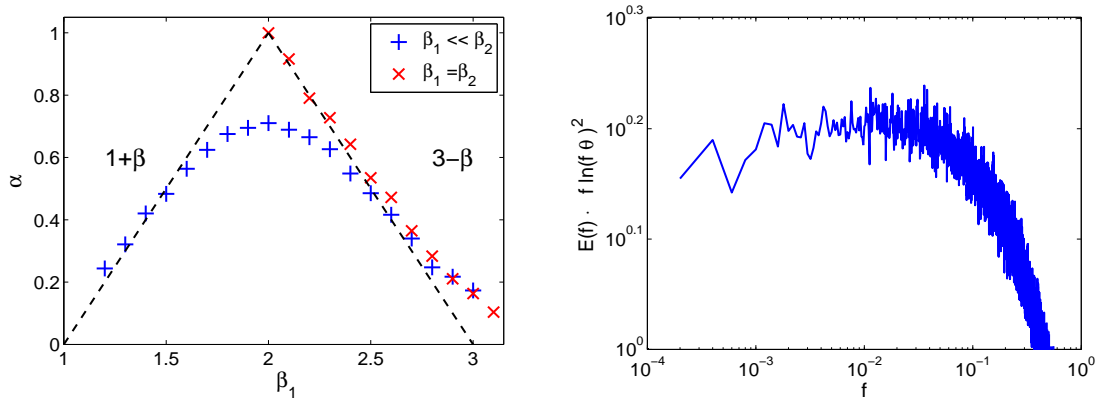


FIGURE 4.30 – Gauche : exposant  $\alpha$  en fonction de  $\beta_1$  pour  $\beta_2$  égal à 21. Droite : spectre compensé de  $E(f)$  pour  $\beta_1 = 2$ .

Les brèves excursions dans l'attracteur  $B$  permettent d'approximer le signal comme une succession de pics espacés par des durées  $\tau$  indépendamment distribuées par  $P(\tau) \sim \tau^{-\beta_1}$ . Pour de tels signaux, le calcul analytique de Lowen et Teich [38] prédit les spectres

$$E(f) \sim \begin{cases} f^{-(\beta+1)} & \text{pour } \beta \in ]1, 2[ \\ f^{-1} \ln(f\theta)^{-2} & \text{pour } \beta = 2 \\ f^{3-\beta} & \text{pour } \beta \in ]2, 3[ \\ -\ln(f\theta) & \text{pour } \beta = 3 \end{cases} \quad (4.36)$$

Nos résultats sont en accord avec la théorie, comme l'indique les deux courbes de tendances en noir sur la figure 4.30 de gauche. Pour  $\beta_1 < 2$ , les exposants  $\alpha$  suivent la courbe définie par  $\alpha = \beta + 1$  et pour  $\beta_1 > 2$ , ils suivent la courbe définie par  $\alpha = 3 - \beta_1$ .

Proche du point  $\beta_1 = 2$ , nous constatons que les points sont légèrement en-dessous de la prédiction. Nous retrouvons ici le même comportement observé au point  $\beta_1 = 3$  dans le cas symétrique. En effet, au point  $\beta_1 = 2$ , le spectre comporte une correction logarithmique, comme l'illustre le spectre compensé par la fonction  $f \ln(f\theta)^2$  sur la figure 4.30 de droite. Ainsi au voisinage de ce point, le calcul des exposants  $\alpha$  nécessite un grand nombre de réalisations.

Dans ces deux dernières sections, nous avons montré que la présence d'une dissymétrie entre les deux états  $A$  et  $B$  ne change pas la relation  $\alpha + \beta = 3$  lorsque  $\beta > 2$ . Cependant à proximité de l'exposant  $\beta = 2$ , l'exposant  $\alpha$  peut être légèrement plus faible que  $3 - \beta$  si le nombre d'événements n'est pas assez grand.

### Transitions entre plusieurs états

Nous avons aussi étendu nos simulations au cas où le système peut transiter entre  $N$  états différents. Nous avons repris la configuration symétrique où la probabilité de transiter entre les différents états est donnée par la constante  $\nu$ . Nous avons calculé l'exposant  $\alpha$  dans les cas où  $N = [2, 3, 4, 10]$ . Les résultats sont présentés sur la figure 4.6.4. Un échantillon de la série temporelle  $u(t)$  pour  $N = 4$  et  $\nu = 1$  est tracé sur la figure de gauche. Sur la figure de droite, on a représenté  $\alpha$  en fonction de  $\nu$  pour les différents  $N$ .



Nous constatons que l'ajout de nouveaux états ne semble pas influencer la relation  $\alpha = 2 - \nu$ , équivalente à  $\alpha = 3 - \beta$ . Ainsi la relation  $\alpha + \beta = 3$  semble généralisable au cas où le système transite entre un nombre  $N$  fini d'états .

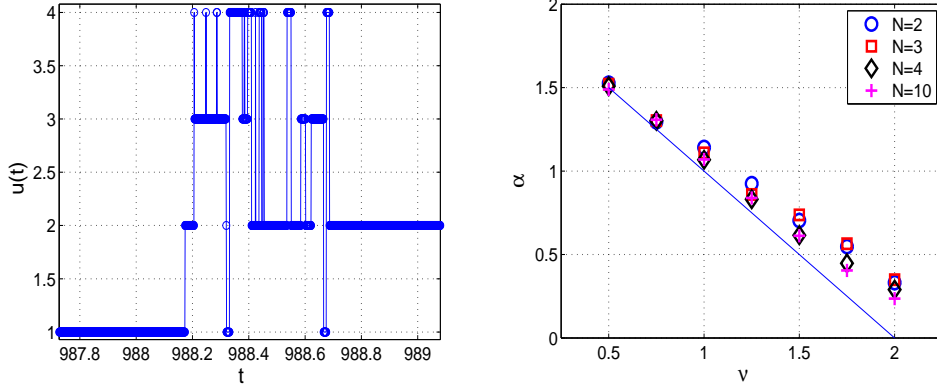


FIGURE 4.31 – Gauche : série temporelle de  $u(t)$  dans le cas où le système peut transiter entre quatre états différents. Droite : évolution de  $\alpha$  en fonction de  $\nu$  pour un nombre d'états  $N$  égal à : 2 en bleu, 3 en rouge, 4 en noir et 10 en magenta.

## 4.7 Comparaison avec d'autres études expérimentales et numériques

Nous avons présenté dans ce chapitre la première observation expérimentale d'un spectre en  $1/f$  en turbulence bidimensionnelle forcée.

De récentes simulations d'écoulements bidimensionnels [15, 16] ont montré la présence d'un spectre temporel en  $1/f$  aux basses fréquences pour les composantes de Fourier spatiales  $\hat{u}(\mathbf{k}, \omega)$  de nombre d'onde  $k = 1$ . Ces écoulements sont périodiques spatialement dans les deux directions et le forçage est localisé proche des grandes échelles. Dans ces articles, les auteurs ont mentionné le modèle basé sur les temps de relaxation (section 4.5.2) comme l'origine du spectre en  $1/f$ , sans pour autant comparer les exposants des distributions et des spectres. Or nous avons montré dans cette section que ce modèle reposant sur l'existence de temps de relaxation ne concordait pas avec nos résultats expérimentaux.

On trouve aussi dans l'article de Sommeria [56], une étude des spectres temporels des grandes échelles spatiales de l'écoulement. Cependant, le comportement de la partie basse fréquence des spectres n'a pas été discuté, même si ces spectres présentent une loi d'échelle aux basses fréquences avec un exposant faible. Nous avons donc extrait ces courbes de l'article [56] (cf figure 4.32) et nous avons fait figurer un spectre en  $1/f$  illustré par la droite verte. Sur la figure de gauche, les courbes noires avec un spectre plat aux basses fréquences correspondent à  $Rh = 3.56$  et celles avec un spectre en  $1/f$ , à  $Rh > 14$ . Nous observons bien la présence de spectre en  $1/f$ . Le montage expérimental est le même que le nôtre à la différence qu'il comporte un réseau de  $6 \times 6$  tourbillons contre  $2 \times 4$  dans notre expérience. Ainsi, même dans le cas d'une séparation d'échelle plus grande entre la taille du forçage et de la cellule, nous constatons la présence d'un spectre en  $1/f$ .

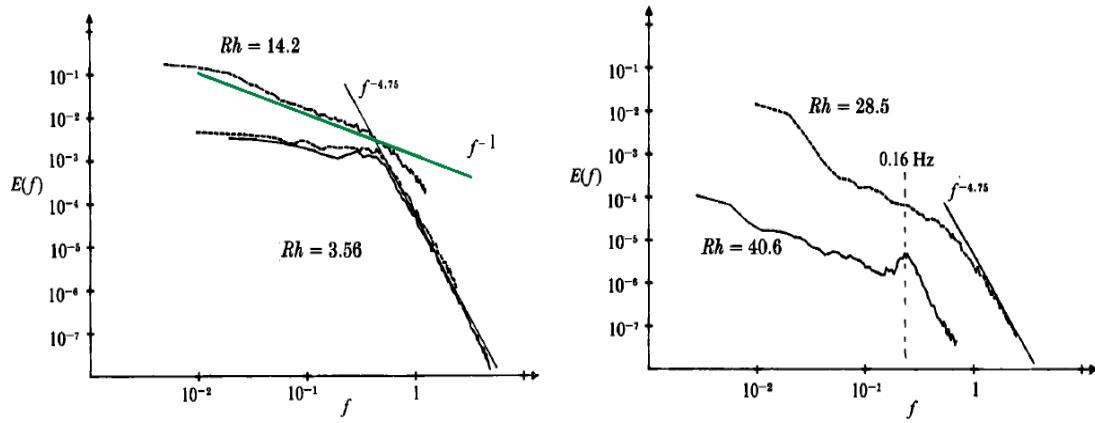


FIGURE 4.32 – Spectres temporels de la composante grande échelle extraits de l'article [56]. La droite verte correspond à la fonction  $f^{-1}$ .

## 4.8 Conclusion

Nous avons montré que les structures à grande échelle présentent une signature spectrale particulière. En effet, les spectres fréquentiels de  $U_L$  suivent une loi de puissance aux basses fréquences, avec un exposant  $\alpha = 0.7$ . Les mesures des sondes Doppler ont confirmé la présence d'une loi d'échelle avec un exposant proche de moins un.

L'origine de cet exposant est associée aux changements de signe de  $U_L$ . La distribution des durées entre deux changements de signes successifs suit une loi de puissance aux temps longs, caractérisée par l'exposant  $\beta = 2.25$ . Nous avons montré que les exposants  $\alpha$  et  $\beta$  sont liés par la formule  $\alpha + \beta = 3$ , prédite par la théorie du renouvellement.

Nous avons aussi vérifié que si  $\beta > 2$ , la présence d'une dissymétrie entre les deux signes de  $U_L$  n'affectait pas la relation précédente.



# Chapitre 5

## Transitions entre différents régimes turbulents

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction et motivations . . . . .</b>	<b>97</b>
5.1.1	Du régime chaotique au régime turbulent . . . . .	97
5.1.2	Bifurcations entre différents régimes turbulents . . . . .	97
5.1.3	Plan du chapitre . . . . .	98
<b>5.2</b>	<b>Propriétés statistiques des mesures des Sondes Vives . . .</b>	<b>99</b>
5.2.1	Norme de $U_L$ . . . . .	99
5.2.2	Coefficient d'aplatissement de $U_L$ . . . . .	101
5.2.3	Bilan . . . . .	102
<b>5.3</b>	<b>Étude de la distribution de <math>U_L</math> . . . . .</b>	<b>102</b>
5.3.1	Les distributions pour la gamme $Rh \leq 12$ . . . . .	102
5.3.2	Études pour la gamme $Rh > 12$ . . . . .	103
5.3.3	Conclusion . . . . .	112
<b>5.4</b>	<b>Étude des champs moyens de vorticité et lignes de courant</b>	<b>113</b>
<b>5.5</b>	<b>Identification et quantification des récurrences . . . . .</b>	<b>117</b>
5.5.1	Principe de l'étude . . . . .	117
5.5.2	Méthodes mathématiques . . . . .	118
5.5.3	Analyse d'un tracé de récurrence pour $Rh = 30$ . . . . .	119
5.5.4	Analyse et quantification des récurrences . . . . .	123
5.5.5	Moyenne cohérente . . . . .	125
<b>5.6</b>	<b>Étude de l'état condensé . . . . .</b>	<b>127</b>
5.6.1	Mécanisme de sélection de l'état condensé . . . . .	132
5.6.2	Conclusion . . . . .	134
<b>5.7</b>	<b>Conclusion sur les différentes transitions . . . . .</b>	<b>134</b>

---

## 5.1 Introduction et motivations

### 5.1.1 Du régime chaotique au régime turbulent

Nous avons montré dans le chapitre 2 les transitions successives entre l'état laminaire et l'état chaotique, qui apparaît à  $Rh \simeq 3$ . Dans ce chapitre, nous souhaitons étudier l'état turbulent avec  $Rh$  supérieur à 10.

Sur la figure 5.1 de droite qui correspond au régime turbulent, on constate la présence de nombreuses structures tourbillonnaires à la fois plus petites et plus grandes que l'échelle du forçage, contrairement à l'état chaotique, où la taille et le nombre de vortex du forçage sont approximativement conservés (figure 5.1 de gauche).

Le régime turbulent est ainsi caractérisé par une dynamique fortement non-linéaire où l'énergie est transférée entre des structures de tailles très différentes.

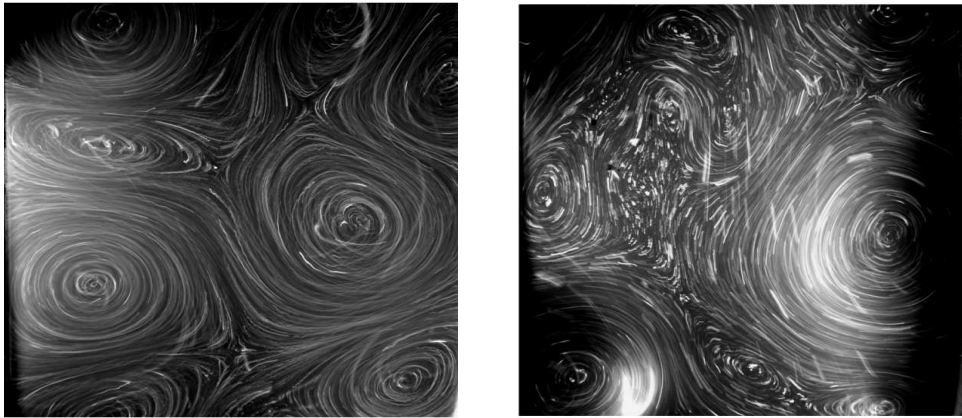


FIGURE 5.1 – Photographie de l'écoulement où les oxydes jouent le rôle de traceurs. Gauche : régime chaotique. Droite : régime turbulent

### 5.1.2 Bifurcations entre différents régimes turbulents

#### Transferts non-linéaire et cascades

En turbulence bidimensionnelle (2D), les transferts d'énergie se font préférentiellement vers les structures de grandes tailles, qui contiennent la majeure partie de l'énergie cinétique de l'écoulement. La séparation d'échelles entre les échelles du forçage et la taille de la cellule étant relativement faible dans notre expérience, nous ne pouvons pas parler de cascade inverse car il n'existe pas de gamme inertielle spatiale bien définie. Les mécanismes de transferts d'énergie des petites aux grandes échelles sont néanmoins toujours présents et nous observons l'apparition de structures cohérentes à grande échelle, dont la dynamique temporelle a été étudiée dans le chapitre 4. Dans ce chapitre, nous allons donc quantifier l'apparition des structures cohérentes à l'échelle de la cellule.

#### Symétries du forçage et écoulement à grande échelle

L'amplitude de ces structures peut être quantifiée par la mesure de la sonde Vives  $U_L$ , la vitesse moyenne entre le centre et le bord de la cellule. Ces structures à grande

échelle doivent briser la symétrie du forçage, qui est invariant par symétrie par réflexion selon les axes  $0x$  et  $0y$ .

L'écoulement moyen retrouve néanmoins ces symétries, sous les hypothèses d'ergodicité du système <sup>1</sup>. Par exemple, les amplitudes des modes de Fourier du champ de vitesse de nombre d'onde  $n_x$  ou  $n_y$  impairs doivent être de moyenne nulle, car anti-symétriques par réflexions selon les axes  $0x$  et  $0y$ .

Or  $U_L$  mesure la contribution des modes de nombre d'onde  $n_x$  et  $n_y$  impairs. En plus d'être de moyenne nulle, la distribution  $P$  des amplitudes de  $U_L$  doit être invariante par changement de signe, c'est à dire

$$P(-U_L) = P(U_L) \quad (5.1)$$

La forme de cette distribution est à priori inconnue, mais on peut supposer que l'émergence de structures cohérentes dans la cellule va l'affecter.

### Distribution des amplitudes de vitesse

Des études expérimentales et numériques [19, 49, 56] ont montré le caractère quasi-gaussien des amplitudes des composantes de la vitesse  $\mathbf{v}$  et de la fonction courant  $\psi$  dans le régime turbulent, où les structures sont petites par rapport à la taille du domaine. Cette fonction de courant est directement reliée à  $U_L$ , car le flux  $\phi$  entre le centre et la paroi est égale à la différence de la fonction de courant entre ces deux points. On peut alors supposer que cette distribution suit une loi gaussienne pour de faibles valeurs de  $Rh$ .

Cependant l'augmentation de  $Rh$  va favoriser l'émergence de structures cohérentes à l'échelle de la cellule, et ces dernières affecteront la forme de la distribution. Il doit alors exister une transition, observable sur la forme des distributions entre le régime turbulent, où les statistiques sont gaussiennes, à un autre régime turbulent caractérisé par l'émergence de structures à l'échelle de la cellule.

Bien qu'il existe des études sur les propriétés de ces régimes, comme l'évolution des spectres spatiaux en fonction de  $Rh$  [66], aucune étude ne s'est intéressée à la nature de leur transition.

### 5.1.3 Plan du chapitre

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux différentes transitions pour  $Rh > 10$ . Dans la première section, nous étudierons les moments de la variable  $U_L$  qui indiquent la présence de deux transitions. La première transition se produit à  $Rh \simeq 12$  et est caractérisée par une déviation de la distribution de  $U_L$  du comportement gaussien. Dans la section 3, nous quantifierons cette transition en étudiant la distribution de  $P(U_L)$ .

La seconde transition à  $Rh \simeq 30$  est associée à une stabilisation des propriétés statistiques de  $U_L$ , telle que la norme ou le coefficient d'aplatissement, qui saturent et deviennent indépendantes de  $Rh$ . Afin d'étudier cette transition, nous analyserons dans la section 4 les champs moyens de vorticité issus du suivi de particules. Dans la

---

<sup>1</sup>Cette hypothèse implique que la moyenne temporelle est équivalente à la moyenne statistique sur les différentes réalisations

section 5, nous montrerons que cette transition est due à l'émergence d'une structure particulière du champ de vorticité, qui correspond à l'état condensé (cf chapitre 1). Les propriétés de cet état seront analysées dans la section 6.

## 5.2 Propriétés statistiques des mesures des Sondes Vives

### 5.2.1 Norme de $U_L$

#### Résultats

Nous allons tout d'abord nous intéresser à la norme de  $U_L$  valant  $\langle U_L^2 \rangle^{1/2}$ . Son évolution en fonction de  $I$  est tracée sur la figure 5.2 de gauche pour  $B = 98mT$ . On constate que la norme croît avec le courant injecté jusqu'à  $I = 150A$  et suit la courbe de tendance en pointillés rouges, donnée par  $\alpha\sqrt{I}$  où  $\alpha$  est une constante. Cette observation est confirmée sur la courbe de droite, où la norme au carré de  $U_L$  croît bien linéairement en fonction de  $I$  pour  $I < 100A$ .

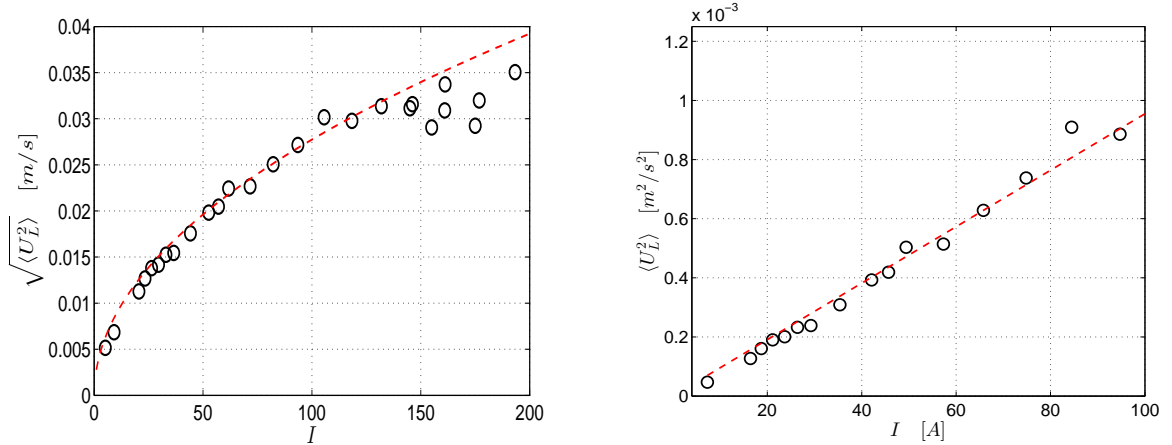


FIGURE 5.2 – Gauche : norme de  $U_L$  en fonction du courant injecté  $I$  pour un champ appliqué  $B = 98mT$ . En pointillés rouges, courbe de tendance donnée par  $\alpha\sqrt{I}$  où  $\alpha$  est une constante. Droite : norme de  $U_L$  au carré en fonction de  $I$ .

#### Loi d'échelle turbulente

La norme de  $U_L$  croît donc comme la vitesse  $v_c$  construite à partir du forçage d'amplitude  $f$  et la largeur de la cellule  $L$  (cf chapitre 3)

$$v_c = \sqrt{fL} = \sqrt{\frac{IB_0}{\rho h}} \quad \text{avec} \quad f = \frac{IB_0}{\rho Lh} \quad (5.2)$$

avec  $I$  le courant total injecté,  $B_0$  le champ magnétique,  $L$  la largeur de la cellule et  $h$  la hauteur de fluide. Cette vitesse s'obtient en équilibrant le terme inertiel avec le forçage dans l'équation de Navier-Stokes

$$\frac{v_c^2}{L} \simeq f \quad (5.3)$$

On introduit donc la grandeur adimensionnée  $\langle (U_L^*)^2 \rangle^{1/2}$ , telle que  $U_L^* = U_L/v_c$ . Elle est tracée en fonction de  $Rh$  sur la figure 5.3. On observe que la norme de  $U_L$  adimensionnée croît jusqu'à  $Rh \simeq 12$ , où le rapport se stabilise pour des valeurs proches de  $95 \cdot 10^{-3}$ , puis semble décroître pour  $Rh > 33$ . Ainsi dans la gamme  $12 < Rh < 33$ , la norme suit la relation  $\langle (U_L)^2 \rangle^{1/2} \sim v_c$ .

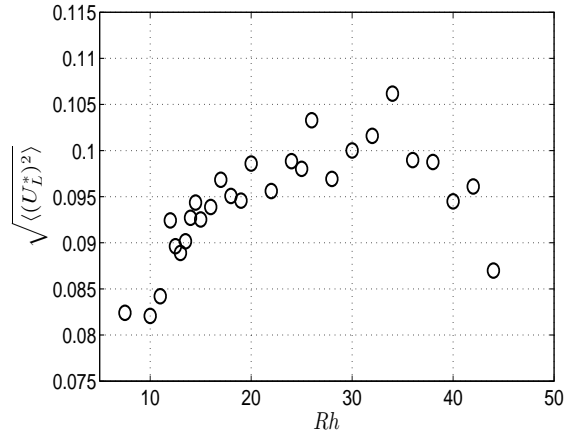


FIGURE 5.3 – Évolution de  $U_L^*$ , la norme de  $U_L$  adimensionnée par  $v_c$ , en fonction de  $Rh$ .

### Norme de $U_L$ à haut $Rh$

Pour étudier le comportement de la norme de  $U_L$  à haut  $Rh$ , nous avons tracé  $\langle U_L^2 \rangle^{1/2}$  pour  $Rh > 33$  avec trois champs magnétiques appliqués différents sur la figure 5.4. On constate que la norme devient indépendante du courant injecté  $I$  et l'amplitude de saturation semble différer légèrement selon le champ magnétique appliqué.

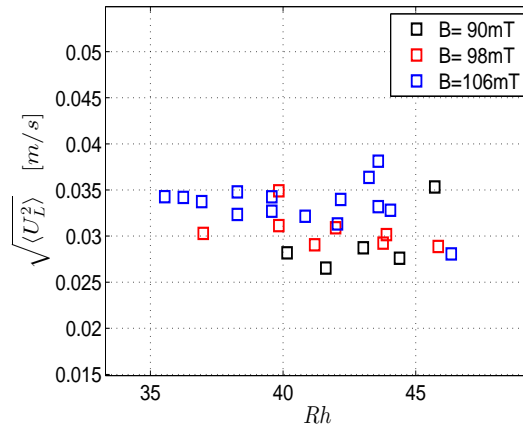


FIGURE 5.4 – Norme de  $U_L$  en fonction de  $Rh$  (plus grand que 35) pour différents champs magnétiques. En noir :  $B = 90mT$ , en rouge  $B = 98mT$  et en bleu  $B = 108mT$ .



## Identification des deux transitions

Pour conclure cette partie, à partir de l'étude de la norme de  $U_L$  en fonction de  $Rh$ , on a identifié deux régimes différents :

- Pour  $12 < Rh < 33$ , la norme croît comme  $v_c = \sqrt{fL}$ , la vitesse construite à partir du forçage  $f$  et de la taille de la cellule  $L$ .
- Pour  $Rh > 33$ , la norme sature et ne dépend plus du courant injecté.

### 5.2.2 Coefficient d'aplatissement de $U_L$

#### Définition

Le coefficient d'aplatissement est une grandeur qui permet de quantifier l'étalement de  $U_L$  par rapport à sa valeur moyenne, qui du fait de la symétrie du forçage est nulle. Le coefficient d'aplatissement  $K$  est défini pour un signal de valeur moyenne nulle par

$$K = \frac{\langle U_L^4 \rangle}{\langle U_L^2 \rangle^2} \quad (5.4)$$

Il est usuellement comparé à la valeur de référence d'une distribution gaussienne qui vaut  $K = 3$ . Ainsi si  $K > 3$ ,  $U_L$  est piquée autour de la valeur 0 et inversement,  $K < 3$  correspond à un étalement de la distribution.

#### Résultats

Le coefficient d'aplatissement de  $U_L$  est représenté sur la figure 5.5 fonction de  $Rh$ , avec en ordonnée  $3 - K$ . On constate que pour  $Rh < 12$ , les points sont proches de zéro. Les distributions sont donc gaussiennes entre  $Rh = 7.5$  et 12.

Pour  $Rh > Rh_c$  avec  $Rh_c \simeq 12$ , Le coefficient d'aplatissement bifurque de la valeur 3 vers des valeurs plus faibles. La distribution  $P(U_L)$  dévie ainsi continûment de la distribution gaussienne et s'aplatit autour de la valeur  $U_L = 0$ , comme on le verra dans la section suivante. Cette décroissance s'arrête avec  $K \simeq 2$  à partir de  $Rh \simeq 33$  et le coefficient d'aplatissement atteint un plateau en se stabilisant à la valeur  $K \simeq 2.25$ .

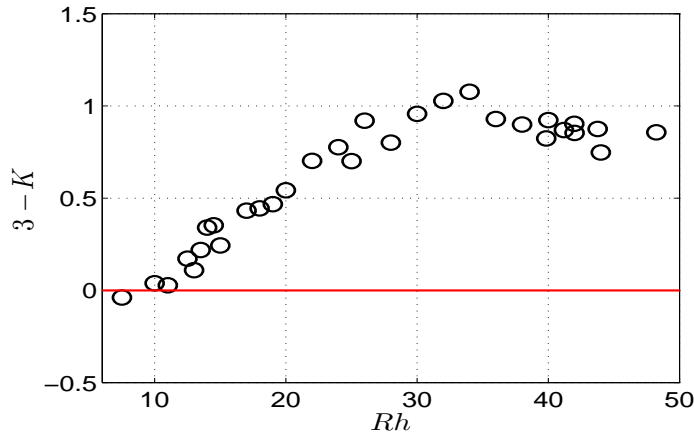


FIGURE 5.5 – Kurtosis de  $U_L$  en fonction de  $Rh$ .

### 5.2.3 Bilan

On peut donc conclure que dans la zone  $Rh \in [12, 33]$ , la norme de  $U_L$  croît comme  $v_c$  et ne suit plus une distribution gaussienne. Dans la prochaine section, nous allons étudier plus en détails la forme de la distribution de  $U_L$ .

## 5.3 Étude de la distribution de $U_L$

Dans la section précédente, on a constaté que la distribution de  $U_L$  déviait de la fonction gaussienne. Nous allons donc étudier cette transition dans la gamme  $Rh \in [10, 20]$ .

### 5.3.1 Les distributions pour la gamme $Rh \leq 12$

Sur la figure 5.6, les distributions des amplitudes de  $U_L^*$ , la vitesse moyenne adimensionnée, sont tracées pour des valeurs de  $Rh$  égales à 10 et 12. On constate qu'elles suivent bien une distribution gaussienne ce qui confirme la mesure du coefficient d'aplatissement ( $K = 3$ ) de la section précédente.

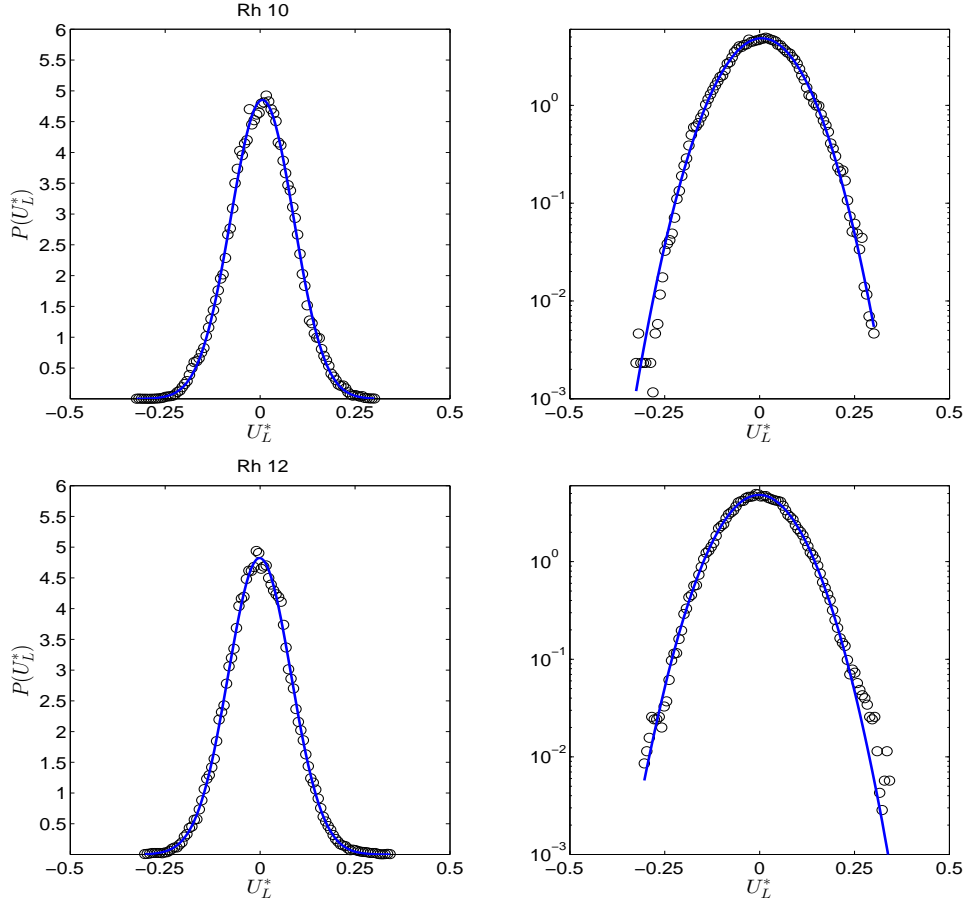


FIGURE 5.6 – Distributions des amplitudes de  $U_L^*$  (ronds noirs), la vitesse adimensionnée, avec en haut  $Rh = 10$  et en bas  $Rh = 12$ . La courbe bleue est la distribution gaussienne de moyenne nulle et de variance donnée par la norme de  $U_L^*$  au carré.

### 5.3.2 Études pour la gamme $Rh > 12$

#### Modélisation des distributions

Pour la gamme  $Rh > 12$ , nous cherchons à caractériser l'aplatissement de la distribution en  $U_L^* = 0$ . Nous observons donc une transition entre une distribution centrée en zéro avec un maximum pour  $Rh \leq 12$  à une distribution présentant deux maxima pour  $Rh \geq 20$ , comme l'illustre la figure 5.7. Entre ces deux valeurs de  $Rh$ , le coefficient d'aplatissement varie continûment.

Nous supposons que la distribution est la somme de deux gaussiennes centrées en  $\pm U_m$ . Pour  $Rh = Rh_c$ ,  $U_m$  vaut zéro puis croît à mesure que  $Rh$  augmente. Ce modèle est aussi motivé par la présence d'une décroissance gaussienne des ailes des distributions. On pose donc que la distribution de  $U_L^*$  se décompose comme

$$P_t(U_L^*) = \frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{U_L^* - U_m}{\sigma}\right)^2\right] + \frac{(1-A)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{U_L^* + U_m}{\sigma}\right)^2\right] \quad (5.5)$$

Lorsque  $A = 0.5$ , les deux gaussiennes sont parfaitement symétriques et centrées en  $\pm U_m$  avec une variance égale à  $\sigma^2$ . Pour prendre en compte les dissymétries des distributions, le coefficient  $A$  peut varier pour optimiser l'estimation de  $U_m$  et  $\sigma$ . Les distributions sont calculées sur une grille de 100 points.

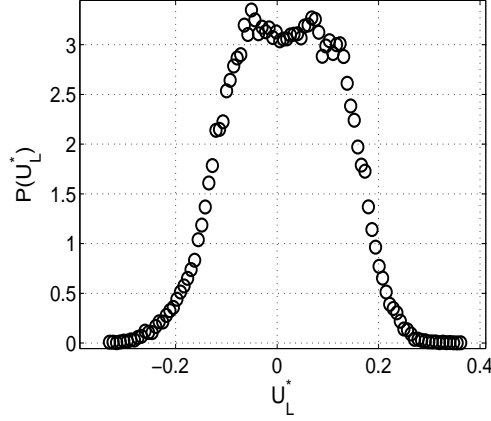


FIGURE 5.7 – Distributions des amplitudes de  $U_L^*$  (ronds noirs), la vitesse adimensionnée avec  $Rh = 20$ .

Parmi toutes les mesures effectuées, nous n'avons sélectionné que les distributions les plus symétriques pour chaque  $Rh$  afin de calculer ces différents coefficients. Nous discuterons des résultats avec des distributions moins symétriques à la fin de cette section.

### Les courbes et les résultats des estimations

Les distributions pour des valeurs de  $Rh = 13, 14$  et  $15$  sont tracées sur la figure 5.9, et pour  $Rh = 16$  et  $18$  sur la figure 5.10. Les distributions  $P(U_L^*)$  sont représentées avec des ronds noirs. La courbe donnée par l'équation 5.5 (en bleu), résultat de l'estimation, est superposée aux points. Les courbes rouges correspondent aux deux gaussiennes centrées en  $\pm U_m$ .

Pour les différents  $Rh$ , nous constatons que les valeurs de  $U_L^*$  sont toutes comprises entre plus et moins 0.35, ce qui confirme la validité de l'adimensionnement de  $U_L$  par  $v_c$ . On remarque aussi que la courbe s'aplatit progressivement autour de la valeur  $U_L^* = 0$ .

Les courbes données par l'équation 5.5 (en bleu) semblent bien suivre la distribution de  $P(U_L)$  (ronds noirs). Il y a donc un bon accord entre notre modèle et les résultats expérimentaux. La courbe en bleu s'écarte des points de la distributions vers  $|U_L^*| > 0.25$ , qui est la limite de convergence de la distribution.

En effet, nous avons estimé les incertitudes sur les ailes des distributions en calculant  $P(U_L^*)$  sur la moitié du signal, qu'on notera  $P_{1/2}(U_L^*)$ . Puis on calcule leur rapport, qui est égal à

$$\delta P(U_L^*) = \frac{P(U_L^*)}{P_{1/2}(U_L^*)} \quad (5.6)$$

Le rapport est tracé en fonction de  $U_L^*$  pour différents  $Rh$  sur la figure 5.8. On constate bien que pour  $|U_L^*| > 0.25$ , les incertitudes sont importantes.

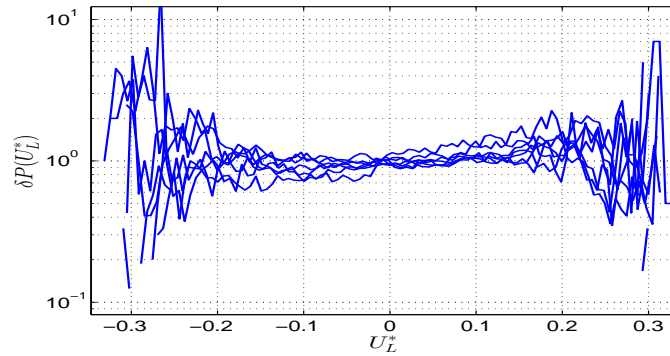


FIGURE 5.8 – Rapport de la distributions  $P(U_L^*)$  des amplitudes de  $U_L^*$  sur la distribution  $P_{1/2}(U_L^*)$  calculée sur la moitié de la durée signal, en fonction de  $U_L^*$  et pour différents  $Rh$ .

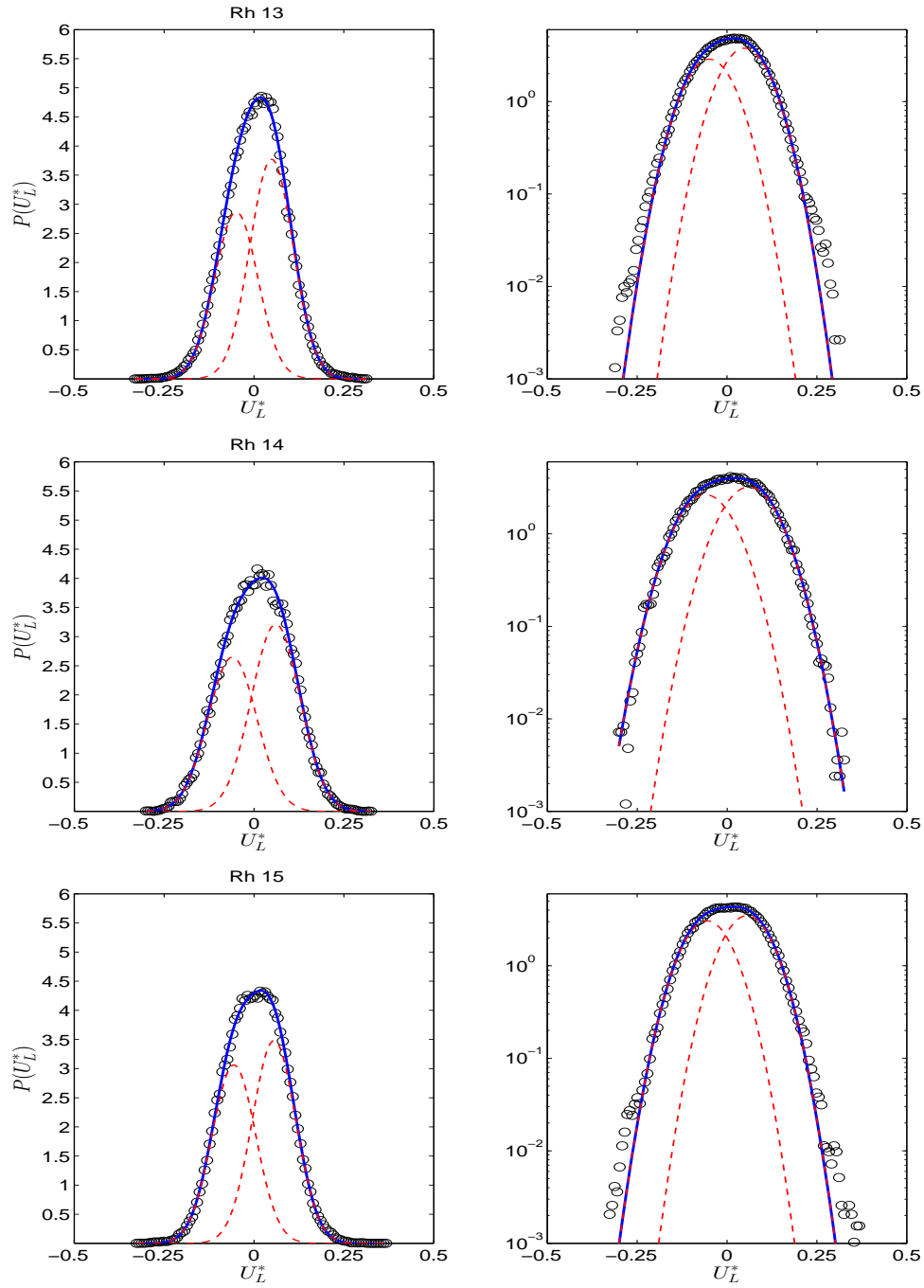


FIGURE 5.9 – Distributions des amplitudes de  $U_L^*$  représentées par les ronds noirs, de haut en bas  $Rh = 13, 14$  et  $15$ . La courbe bleue est donnée par l'équation 5.5 qui est la somme de deux gaussiennes centrées en  $\pm U_m$ . Ces deux gaussiennes sont tracées en rouges.

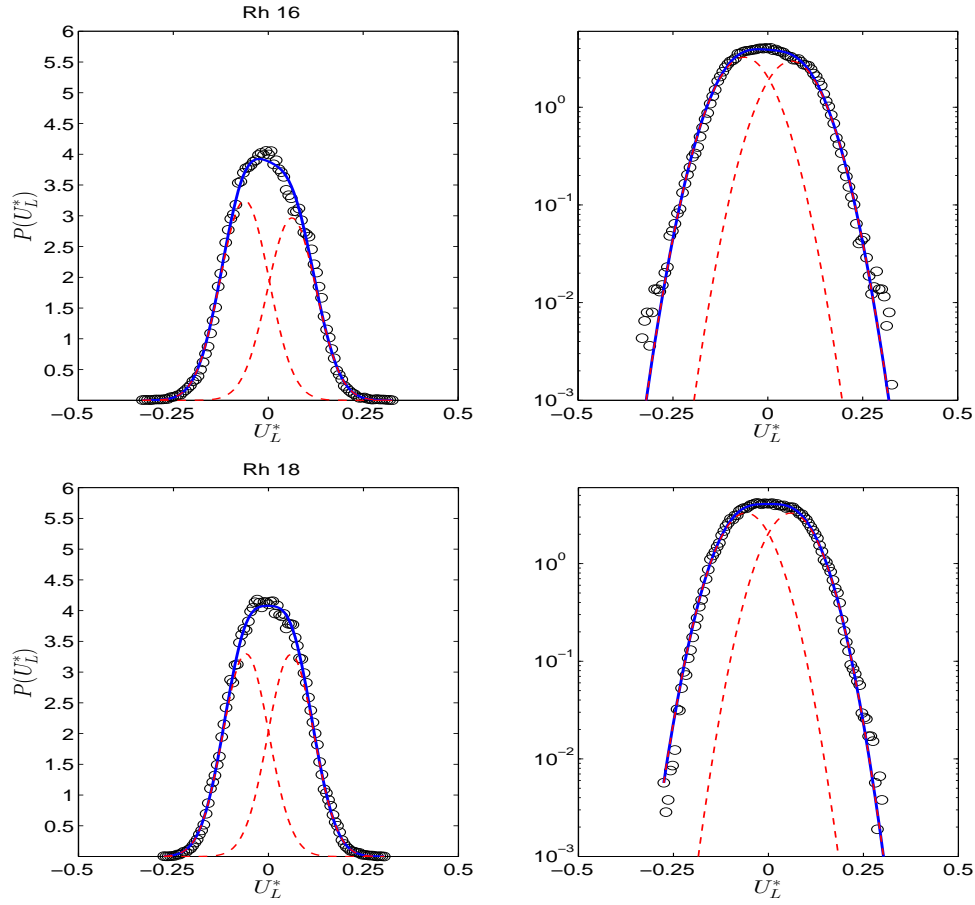


FIGURE 5.10 – Distributions des amplitudes de  $U_L^*$  représentée par les ronds noirs, de haut en bas  $Rh = 16$  et  $18$ . La courbe bleue est donnée par l'équation 5.5 qui est la somme de deux gaussiennes centrées en  $\pm U_m$ . Ces deux gaussiennes sont tracées en rouges.

### Diagramme de bifurcation de $U_m$

Nous venons de montrer que l'accord entre le modèle donné par l'équation 5.5 et les points expérimentaux était très bon. Nous allons présenter l'évolution des coefficients  $U_m$ ,  $\sigma$  et  $A$  en fonction de  $Rh$ .

La valeur  $U_m$ , correspondant à la valeur la plus probable des deux gaussiennes, est représentée sur la figure 5.11 en fonction de  $Rh$ . On constate bien la bifurcation de  $U_m$  dont la variation est particulièrement brusque pour  $Rh$  proche de 12. En supposant que  $U_m$  bifurque continûment, on peut estimer un exposant tel que

$$U_m \propto (Rh - Rh_c)^{1/n} \quad (5.7)$$

avec  $1/n$  l'exposant critique. La figure 5.11 de droite semble indiquer que l'exposant vaut  $n = 4$ , même si le point en  $Rh = 18$  est un peu en dessous de la courbe.

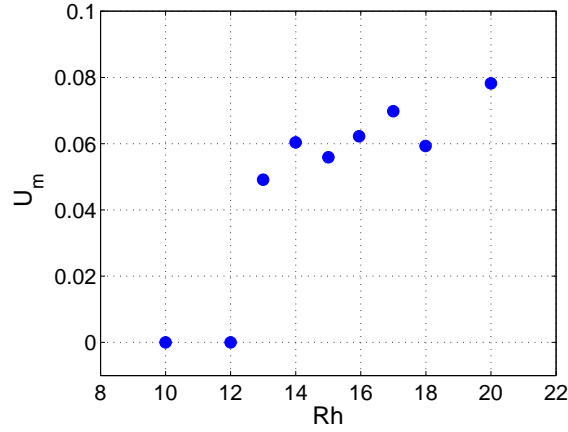


FIGURE 5.11 – Valeur la plus probable des gaussiennes  $U_m$  en fonction de  $Rh$ . On constate la bifurcation à  $Rh \simeq 12$ .

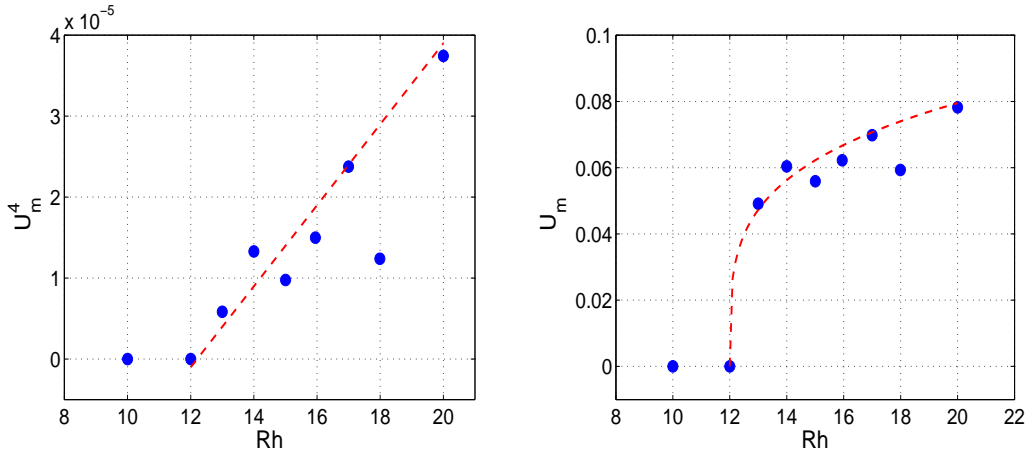


FIGURE 5.12 – Gauche : Valeur la plus probable des gaussiennes  $U_m$  à la puissance quatre en fonction de  $Rh$ . Les points semblent décrire une droite, tracée en rouge. Droite : courbe de bifurcation de  $U_m$  avec la courbe de tendance en rouge, telle que  $U_m \propto (Rh - Rh_c)^{1/4}$ .

### Déviati n standard $\sigma$

Sur la figure 5.13, la déviati n standard des gaussiennes  $\sigma$  est tracée en fonction de  $Rh$  sur la figure de gauche et le rapport  $U_m/\sigma$  sur la figure de droite. On constate que  $\sigma$  est quasiment constante sur toute la gamme de  $Rh$ . Sur la gamme  $Rh \leq 12$  où les distributions sont gaussiennes, la norme de  $U_L^*$ , qui est aussi égale à  $\sigma$ , est de l'ordre de  $8 \cdot 10^{-2}$  (cf figure 5.3). Ainsi  $\sigma$  varie faiblement au seuil de la bifurcation.



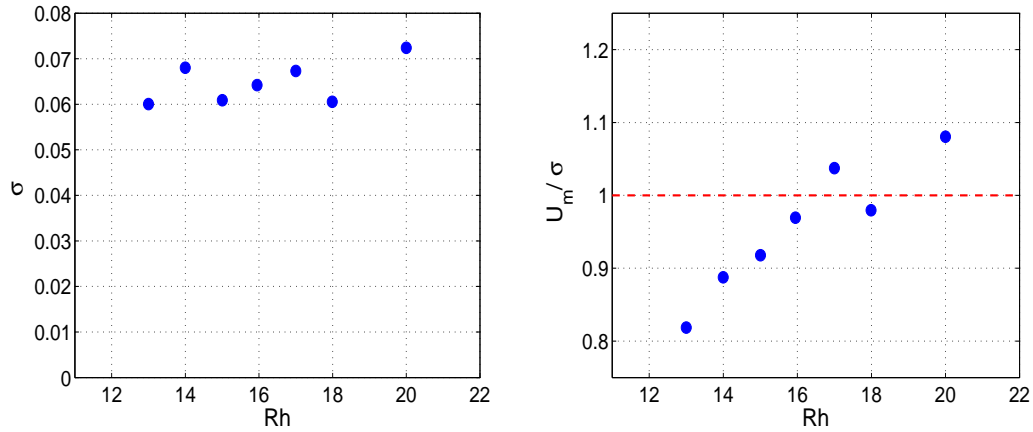


FIGURE 5.13 – Gauche : déviation standard des gaussiennes  $\sigma$  en fonction de  $Rh$ . Droite : évolution du rapport  $U_m/\sigma$  en fonction de  $Rh$ . La droite rouge correspond à limite du critère de Rayleigh, où on distingue deux pics pour la somme de deux gaussiennes.

Le rapport  $U_m$  sur  $\sigma$  nous renseigne sur le nombre de maxima de la la distribution  $P_t(U_L^*)$  grâce au critère de Rayleigh. Pour  $U_m/\sigma < 1$ ,  $P_t(U_L^*)$  ne comporte qu'un seul maximum en zéro et pour  $U_m/\sigma > 1$ , il existe deux maxima en  $\pm U_m$ . Sur la figure 5.13 de droite, le critère semble être valide pour  $Rh > 17$ , même si le point à  $Rh = 18$  semble encore ne pas suivre la tendance de la courbe.

### Coefficient de dissymétrie $A$

Les amplitudes  $A$  sont tracées sur la figure 5.14 en fonction de  $Rh$  pour les mesures effectuées dans cette sous-section. La dissymétrie semble être faible sur les distributions hormis le point  $Rh = 17$ .

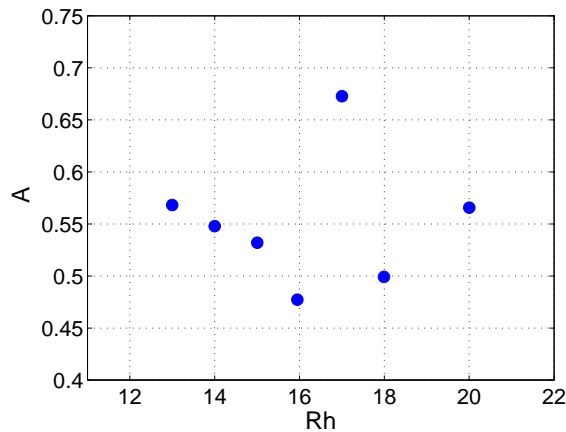


FIGURE 5.14 – Évolution de l'amplitude  $A$  en fonction de  $Rh$ .

## Bilan

En conclusion, nous avons montré que la distribution de  $U_L^*$  pouvait se décomposer comme la somme de deux gaussiennes centrées en  $\pm U_m$  et de variance  $\sigma^2$ . La valeur  $U_m$  bifurque de manière continue en  $Rh = 12$  alors que  $\sigma$  varie très peu.

## Discussion des mesures faiblement symétriques

Nous n'avons montré dans la sous-section précédente que les mesures relatives aux distributions les plus symétriques pour chaque  $Rh$ . Nous présentons ici les résultats des estimations des coefficients de l'équation 5.5 pour des distributions peu symétriques.

L'écart à la symétrie est quantifié par l'amplitude de  $A$ , représentée sur la figure 5.15 de gauche. On remarque que les points proches du seuil peuvent être très dissymétriques avec  $A > 0.75$ .

Le maximum des gaussiennes est reporté sur la figure 5.16 où la courbe de bifurcation est tracée en rouge. On remarque que même avec une forte dissymétrie,  $U_m$  semble être proche de la courbe de bifurcation variant en  $(Rh - Rh_c)^{1/4}$ . De même,  $\sigma$  tracée sur la figure 5.15 de droite, a le même comportement qu'observé précédemment en variant peu sur la gamme  $Rh$  compris entre 12 et 20.

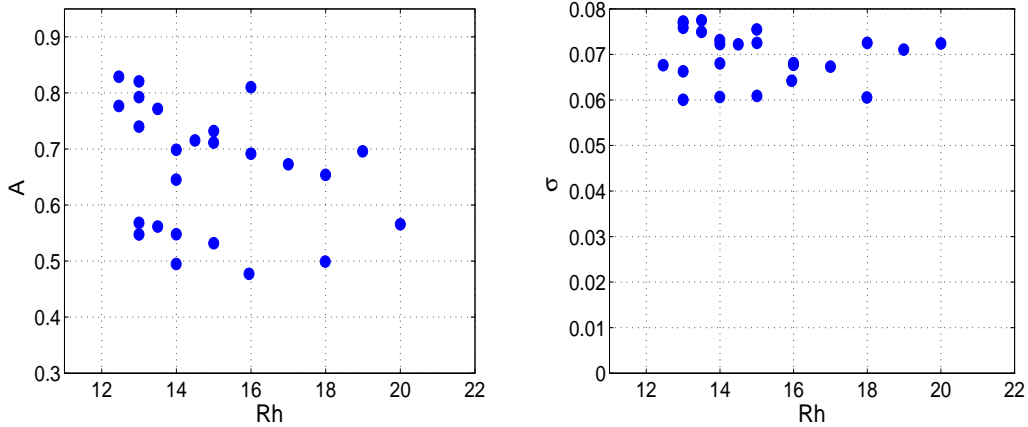


FIGURE 5.15 – Gauche : Evolution de l'amplitude  $A$  en fonction de  $Rh$ . Droite :  $\sigma$  en fonction de  $Rh$  pour des distributions dissymétriques.

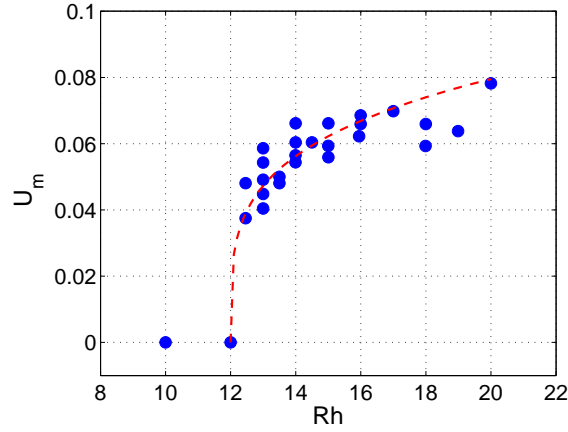


FIGURE 5.16 –  $U_m$  en fonction de  $Rh$  pour des distributions dissymétriques.

En conclusion de cette section, même si les signaux sont dissymétriques, la prise en compte de l'écart à l'état symétrique grâce au coefficient  $A$  permet de retrouver des coefficients  $U_m$  et  $\sigma$  proche du cas symétrique.

### Comparaison des coefficients d'aplatissement

Nous avons comparé la valeur du coefficient d'aplatissement  $K$  calculée directement à partir de  $U_L$  à la valeur du coefficient d'aplatissement  $K_p$  calculée à partir de  $U_m$  et  $\sigma^2$ . Le coefficient  $K$  de la somme deux gaussiennes centrées en  $\pm U_m$  et de variance  $\sigma$  est donné par

$$K_p = \frac{3\sigma^4 + 6U_m^2\sigma^2 + U_m^4}{\sigma^4 + 2U_m^2\sigma^2 + U_m^4} \quad (5.8)$$

Les valeurs du coefficient d'aplatissement  $K$  (ronds bleus) et du coefficient d'aplatissement  $K_p$  (croix rouges) sont représentées en fonction de  $Rh$  sur la figure 5.17 de gauche. On remarque qu'à partir des coefficients  $U_m$  et  $\sigma$  on retrouve des valeurs de  $K_p$  très proches de  $K$ . Pour confirmer cette observation nous avons calculé l'erreur relative  $|K - K_p|/K$  en fonction de  $Rh$  (figure de droite). On constate que cette erreur relative est très faible et la moyenne de  $|K - K_p|/K$  représentée par la droite hachurée est de 3%.

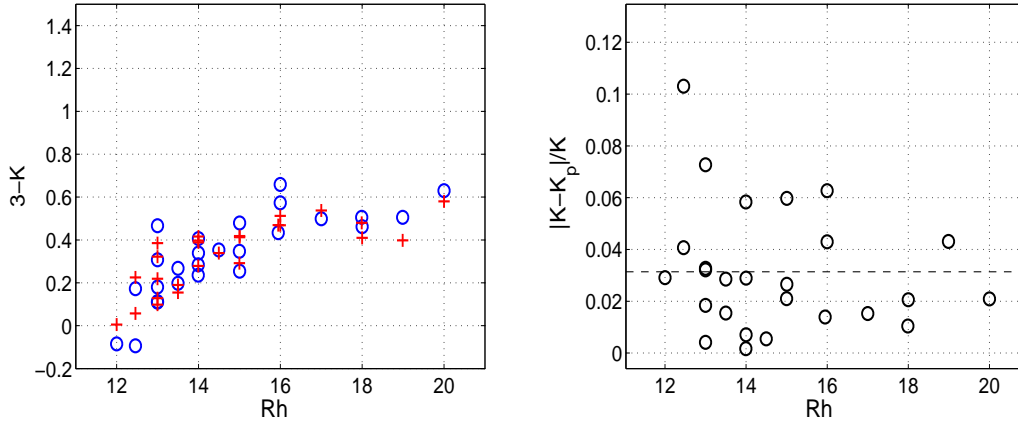


FIGURE 5.17 – Gauche : comparaison entre le coefficient d’aplatissement  $K$  calculé à partir de la série temporelle  $U_L$  (rond bleus) et le coefficient d’aplatissement  $K_p$  calculé à partir de  $U_m$  et  $\sigma$  (croix rouge). Droite : l’erreur relative  $|K - K_p|/K$  en fonction de  $Rh$ . La droite hachurée correspond à la moyenne des erreurs relatives et vaut 3%.

Notre modèle permet de retrouver le coefficient d’aplatissement  $K$  à partir des deux seuls paramètres  $\sigma$  et  $U_m$ , validant ainsi la décomposition en deux gaussiennes.

### 5.3.3 Conclusion

Nous avons montré dans cette section que le phénomène d’aplatissement de la distribution de  $U_L$  proche de zéro pouvait être capturé par sa décomposition en la somme de deux distributions gaussiennes centrées en  $\pm U_m$ . La grandeur  $U_m$  présente une bifurcation continue en  $Rh_c = 12$ . L’exposant de cette bifurcation semble être faible avec  $U_m \propto (Rh - Rh_c)^{1/4}$ . Cependant la distribution des points de mesure autour de cette courbe de bifurcation ne nous permet pas de déterminer précisément l’exposant. Quant à la variance  $\sigma^2$ , elle varie peu sur la gamme de  $Rh$  entre 12 et 20.

## 5.4 Étude des champs moyens de vorticité et lignes de courant

Dans les sections précédentes, nous avons constaté un changement significatif des propriétés statistiques de  $U_L$  pour  $Rh > 33$ , comme pour la norme représentée sur la figure 5.4. Nous allons étudier les champs de vorticité et des lignes de courant pour des  $Rh$  proches de 30.

Ces champs sont obtenus grâce au suivi de particules décrit dans le chapitre 2. Ils sont calculés à partir des champs de vitesse filtrés <sup>2</sup> et moyennés dans le temps. Ces mesures sont effectuées sur une durée de 2 minutes avec 7200 images. Les champs sont représentés sur la figure 5.18 pour  $Rh = 21, 28$ , et sur la figure 5.21 pour  $Rh = 30, 33, 35$  et 39.

### Champs moyens pour $Rh < 30$

On remarque que pour  $Rh$  inférieur à 30, le champ de vorticité moyen comporte de fortes similarités avec le mode du forçage. On identifie en effet les huit tourbillons contra-rotatifs à la fois sur le champ de vorticité et les lignes de courant, même si ils sont un peu décalés par rapport au mode de forçage.

La turbulence étant un processus dissipatif, la puissance injectée moyenne  $\langle \epsilon \rangle$  doit donc être différente de zéro. La puissance  $\epsilon$  est définie comme la projection du champ de vitesse sur le forçage, soit  $\epsilon = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}$ . La projection du champ de vitesse sur le forçage doit donc être non-nulle, ce qui explique pourquoi cette composante du champ de vitesse est fortement présente sur les champs moyens. De plus, tous les modes impairs doivent être de moyenne nulle.

---

<sup>2</sup>les champs sont filtrés par une fonction gaussienne avec une déviation standard égale à  $l = 0.75cm$  et avec une résolution de  $64 \times 64$

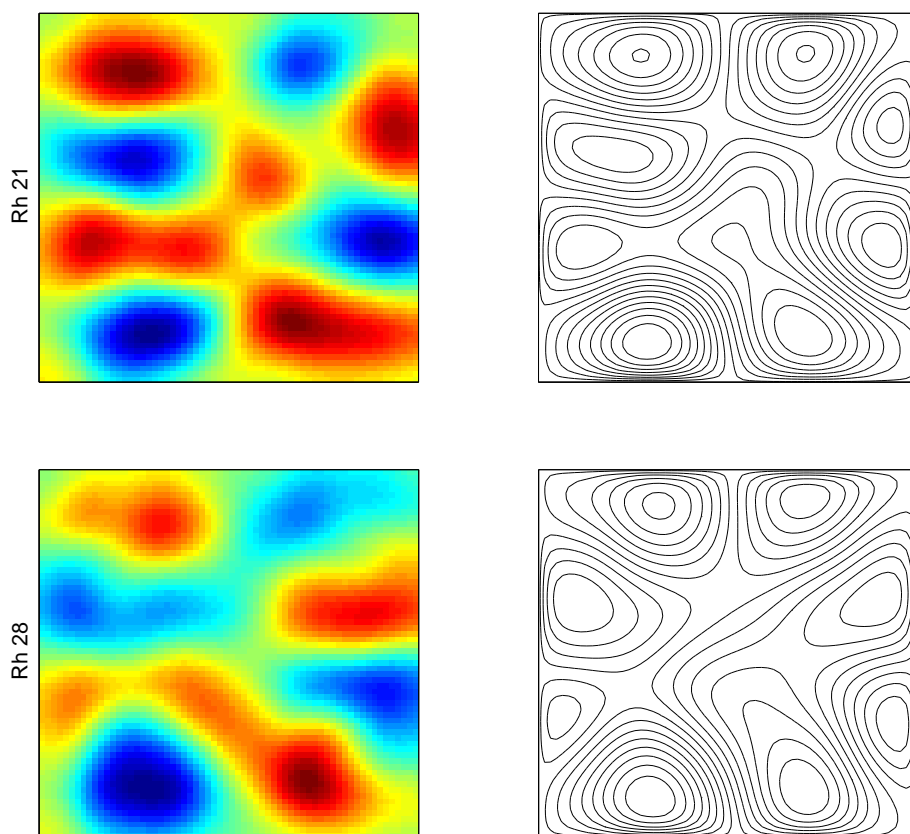


FIGURE 5.18 – Champs de vorticité (à gauche) et lignes de courant (à droite) pour différents  $Rh$ . De haut en bas :  $Rh = 21$  et  $Rh = 28$ .

### Champs moyens pour $Rh > 30$

Pour  $Rh$  plus grand que 30, l'écoulement est dominé par la présence d'une circulation à grande échelle, comme l'indique les lignes de courant de la figure 5.21. Les mesures de  $U_L$  confirment la présence d'une circulation moyenne.

La figure 5.19 illustre bien la différence de comportement entre une mesure à  $Rh$  égale à 25 et 30. Pour  $Rh$  égal à 25, les durées des phases de polarité constante sont plus courtes que celles à  $Rh = 30$ . Les mesures de la figure 5.21 correspondent donc à des phases où la circulation est globalement de même signe.

Nous rappelons que ces champs sont calculés à partir de mesures effectuées sur une durée de 2 minutes et que dans la limite d'une durée de mesure longue, nous devrions retrouver des champs moyens similaires à ceux observés sur la figure 5.18. Ainsi pour  $Rh > 30$ , les durées nécessaires pour obtenir un champ moyen qui respecte les symétries du forçage ont soudainement augmenté.

Les champs de vorticité et les lignes de courant semblent garder la même configuration pour  $Rh$  plus grand que 35. L'écoulement est composé de quatre tourbillons (en bleu) co-rotatifs avec la circulation à grande échelle et formant une croix avec un tourbillon central (en rouge) tournant dans le sens opposé. Nous avons vérifié que cette configuration est identique pour des  $Rh$  allant jusqu'à 44. Nous nommerons cette

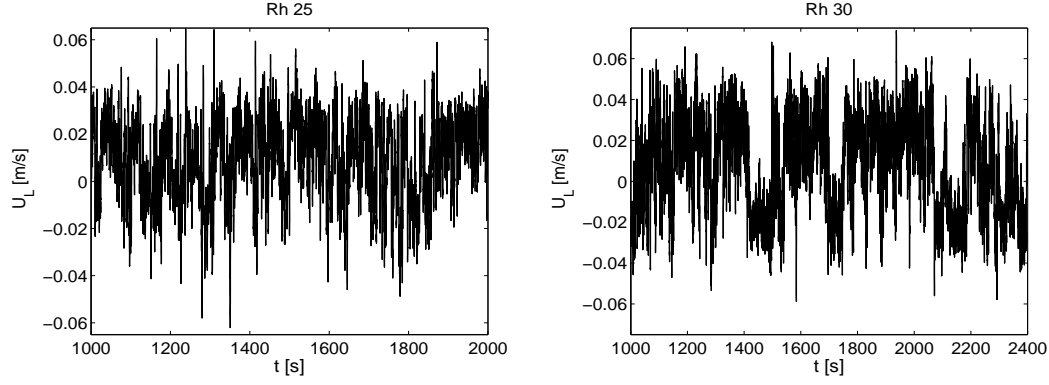


FIGURE 5.19 – Séries temporelles de  $U_L$  pour  $Rh = 25$  (à gauche) et  $Rh = 30$  (à droite).

configuration **l'état condensé**.

Pour  $Rh$  compris entre 30 et 35, on observe des configurations intermédiaires entre celles du forçage et celle de l'état condensé pour la vorticité et les lignes de courant. Une analyse qualitative des instantanés de champ de vorticité pour cette gamme de  $Rh$  montre que le champ de vorticité passe de temps en temps par une configuration proche de celle de l'état condensé.

En effet, on a représenté sur la figure 5.20 trois instantanés du champ de vorticité espacés d'une seconde pour  $Rh$  égal à 30. À 30 secondes, on constate que le champ de vorticité est composé de quatre tourbillons formant une croix avec un tourbillon contra-rotatif au centre, comme pour l'état condensé. Cet état est cependant visité très rapidement et le champ de vorticité a complètement changé en l'espace d'une seconde.

Comme ce phénomène est récurrent, on peut alors supposer que la transition à partir de  $Rh = 30$  est caractérisée par l'émergence progressive de la configuration de vorticité de l'état condensé. Ce phénomène sera quantifié dans la prochaine section.

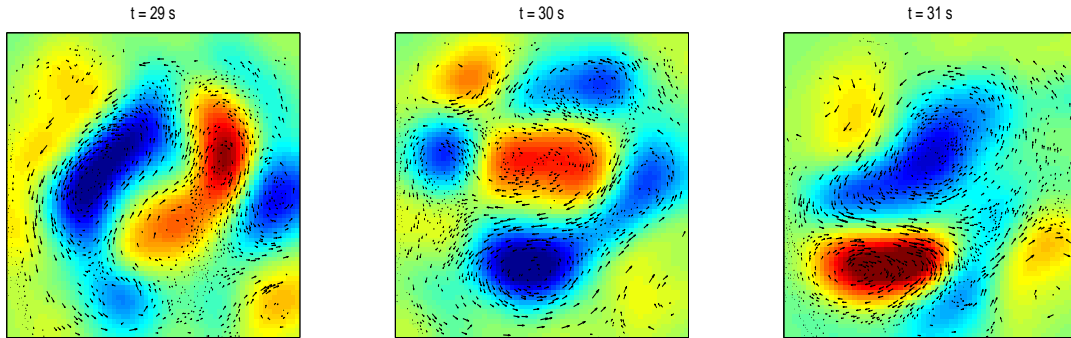


FIGURE 5.20 – Instantanés de champ de vorticité obtenus grâce aux champs de vitesse pour  $Rh = 30$ . Ces instantanés correspondent aux temps  $t = 29, 30$  et  $31$  secondes.

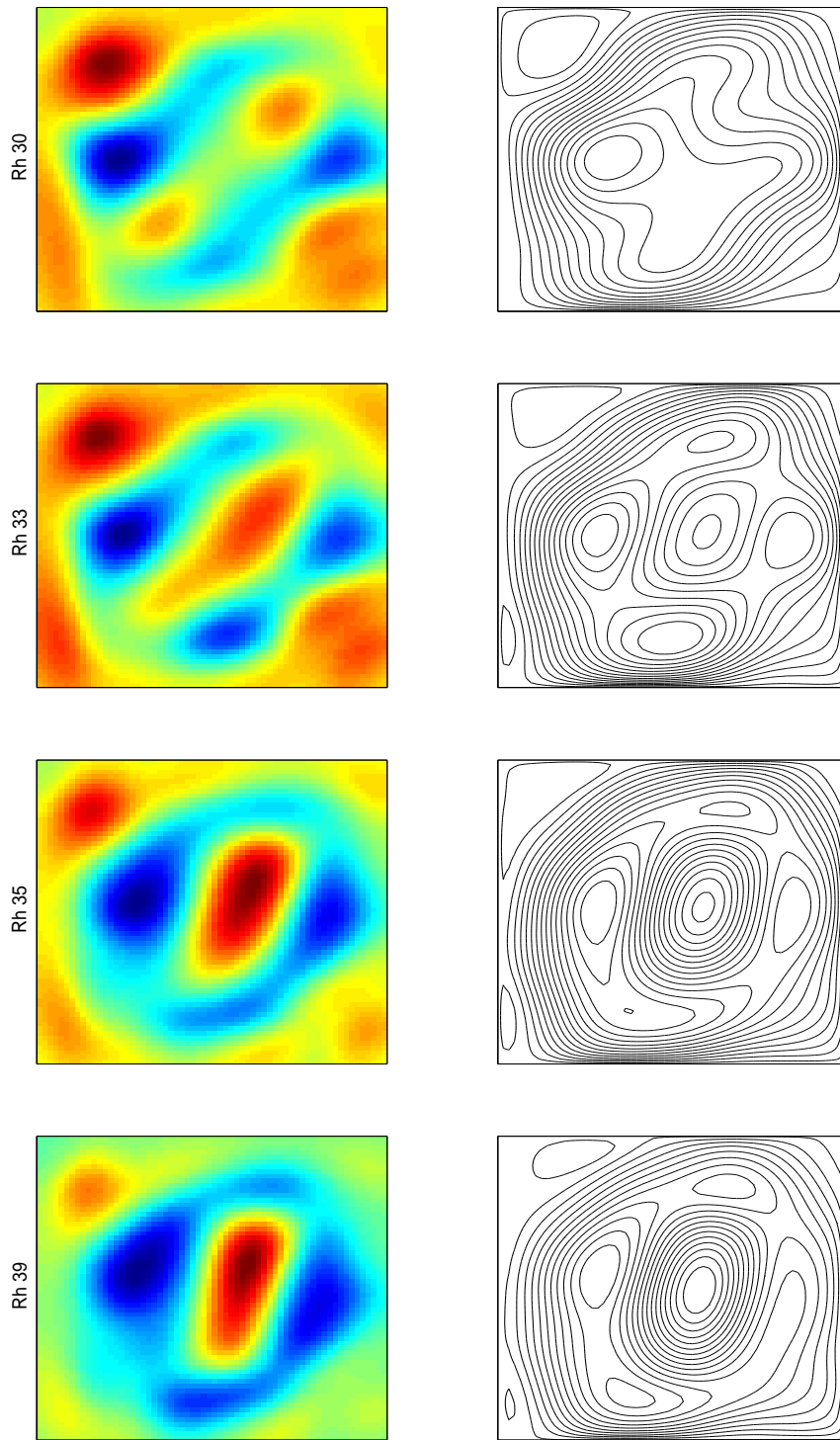


FIGURE 5.21 – Champs de vorticité (  gauche) et lignes de courant (  droite) pour différents  $Rh$ . De haut en bas :  $Rh$  valant 30, 33, 35 et 39.



## Bilan

Nous avons montré que la transition à  $Rh \simeq 30$  observée sur la norme et le coefficient d'aplatissement de  $U_L$  dans les précédentes sections, correspond à un changement de topologie du champ moyen de vorticité et des lignes de courant. Pour  $Rh$  plus grand que 35, l'écoulement reste préférentiellement dans une configuration de vorticité donnée, qu'on nomme état condensé.

Nous allons dans la section suivante quantifier cette transition en identifiant la présence d'une structure préférentielle de vorticité dans la gamme  $Rh \simeq 30 - 35$ .

## 5.5 Identification et quantification des récurrences

### 5.5.1 Principe de l'étude

Nous cherchons donc à savoir si le système explore plusieurs fois une même configuration de vorticité, ce qui revient à identifier des récurrences dans la dynamique du système.

Il existe un grand nombre de méthodes pour l'identification des récurrences. La méthode de détection doit être appropriée à notre configuration expérimentale. En effet, elle doit être robuste à la présence de bruit, due à la fois à la turbulence aux petites échelles et à la technique de mesure. Elle doit aussi s'appliquer aux systèmes ayant un grand nombre de degrés de liberté.

Nous présentons deux méthodes pour identifier la présence de récurrences correspondant à ces critères. La première est une méthode classique qui consiste à calculer la distance entre les points  $\mathbf{x}(t)$  de la trajectoire dans l'espace des phases et à identifier les points proches entre eux en terme de norme. Elle fut tout d'abord appliquée dans le contexte des systèmes dynamiques de basse dimension par Eckmann *et al.* [17] et est connue sous le nom de "Recurrence plots" [41]. Elle est souvent utilisée pour identifier des cycles limite instables en mécanique des fluides, comme par Chandler et Kerswell [8] où la présence de solutions récurrentes a été mis en évidence dans un écoulement bidimensionnel.

La seconde méthode consiste à analyser la co-linéarité des vecteurs  $\mathbf{x}(t)$  en calculant la corrélation normalisée entre deux instants différents. L'avantage de cette méthode est que l'interprétation en terme de corrélation (comprises entre plus et moins un) est plus simple que celle en terme de distances. Afin de déterminer la notion de voisinage pour la première méthode, il est nécessaire de calculer une distance de référence, qui dépend de la méthode choisie [41]. Pour la seconde méthode basée sur la co-linéarité des vecteurs, il est possible d'interpréter directement le calcul de la corrélation, car on considère usuellement que deux vecteurs sont corrélées lorsque la corrélation est au moins supérieure à 0.5.

La détection des récurrences est un projet moins ambitieux que la réduction du nombre de degrés de liberté du système et la décomposition en modes propres de la dynamique. En effet, l'identification de structures récurrentes ne concerne qu'une partie de la dynamique, alors que la détermination des modes propres du système vise à capturer la majeure partie de la phénoménologie.

Cependant la présence de récurrences dans un système dynamique peut être liée à

une dynamique de basse dimension.

### 5.5.2 Méthodes mathématiques

On considère le champ spatio-temporel de vorticité  $\omega(x_j, y_j, t)$  discrétisé sur une grille de résolution spatiale  $N_{res} = 64^2$  avec  $j \in [1, N_{res}]$  et comportant  $N_t$  mesures avec une fréquence d'acquisition  $f_e$  telle que  $t = if_e^{-1}$  avec  $i = [1, N_t]$ .

Les champs de vitesse utilisés pour calculer  $\omega(x, y)$ , ont été au préalable filtrés par un filtre gaussien de demi-largeur  $l = 0.75$  cm, pour supprimer la turbulence aux petites échelles.

Ce champ est contenu dans une matrice de dimension  $N_t \times N_{res}$ , telle que le coefficient  $\omega_{i,j}$  correspond à la vorticité localisée en  $(x_j, y_j)$  et au temps  $t = if_e^{-1}$ . Les lignes de cette matrice correspondent à la dimension temporelle et les colonnes aux dimensions spatiales. Le but de ces méthodes est de comparer deux à deux les vecteurs spatiaux  $\omega_{i,j}$  et  $\omega_{i',j}$ .

#### Récurrence en terme de norme

La première méthode consiste à calculer la distance entre deux vecteurs spatiaux aux temps indicés par  $i$  et  $i'$ . Nous avons choisi la norme euclidienne pour calculer la distance  $r(i, i')$  entre deux vecteurs

$$r_{i,i'} = \left( \sum_{j=1}^{N_{res}} (\omega_{i,j} - \omega_{i',j})^2 \right)^{1/2} \quad (5.9)$$

On obtient donc un tenseur symétrique  $r_{i,i'} = r_{i',i}$ . La difficulté de l'étude de  $r_{i,i'}$  est de définir un seuil caractérisant la récurrence. Le tenseur  $r_{i,i'}$  est utilisé pour calculer le tracé de récurrence  $R_{i,j}(\epsilon)$

$$R_{i,i'}(\epsilon) = H(\epsilon - r(i, i')) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H(x) = 1 & \text{si } x \geq 0 \\ H(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

avec  $H$  la fonction de Heaviside et  $\epsilon$  le seuil définissant une récurrence.  $R_{i,i'}$  est donc une fonction indicatrice de récurrence. Il existe différentes méthodes pour la sélection de  $\epsilon$  [41]. Nous avons choisi une méthode qui consiste à fixer  $\epsilon$  à partir de la fonction cumulatrice  $P(r_{i,i'})$  de la distribution  $p(r_{i,i'})$  des distances entre les vecteurs  $\omega_{i,j}$ . La valeur de  $\epsilon$  est calculée en fonction d'un seuil  $P_{seuil}^r$  telle que

$$P(\epsilon) = P_{seuil}^r \quad \text{avec} \quad P(r_{i,i'}) = \int_0^{r_{i,i'}} p(r'_{i,i'}) dr'_{i,i'}. \quad (5.11)$$

On trouve dans la littérature des seuils fixés à  $P_{seuil}^r = 0.1$ . Ainsi 10% des valeurs de  $r_{i,i'}$  sont comprises entre 0 et  $\epsilon$ . La boule de rayon  $\epsilon$  centrée en  $\omega_{i,j}$  correspond au voisinage de la configuration de vorticité  $\omega_{i,j}$  dans l'espace des phases. Une récurrence est définie lorsque le système repasse dans la boule de rayon  $\epsilon$  centrée en  $\omega_{i,j}$ .

## Récurrance en terme de corrélation

La seconde méthode consiste à calculer la corrélation temporelle entre deux vecteurs spatiaux  $\omega_{i,j}$  et  $\omega_{i',j}$ . Pour chaque instant  $t$ , on définit le vecteur spatial  $\Omega_{i,j}$  de vorticité moyenne nulle

$$\Omega_{i,j} = \omega_{i,j} - \langle \omega_{i,j} \rangle \quad \text{avec} \quad \langle \omega \rangle = \frac{1}{N_{res}} \sum_{j=1}^{N_{res}} \omega_{i,j} \quad (5.12)$$

La fonction de corrélation temporelle  $c(i, i')$  est alors donnée par

$$c(i, i') = \sum_{j=1}^{N_{res}} \frac{\Omega_{i,j}}{\sqrt{\sum_j \Omega_{i,j}^2}} \frac{\Omega_{i',j}}{\sqrt{\sum_j \Omega_{i',j}^2}} \quad (5.13)$$

Le tenseur  $c$  est symétrique, c'est à dire  $c(i, i') = c(i', i)$  et sa diagonale vaut 1. Contrairement au tenseur  $r(i, i')$ , la définition d'une récurrence est plus facile car  $c(i, i')$  est compris entre 1 et  $-1$ . Pour  $-0.5 < c(i, i') < 0.5$ , les deux vecteurs  $\omega_{i,j}$  et  $\omega_{i',j}$  sont faiblement corrélés. La corrélation  $c$  peut aussi s'interpréter comme le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs  $\Omega_{i,j}$  et  $\Omega_{i',j}$ . Cependant ce tenseur ne nous informe que sur la dépendance linéaire entre les deux vecteurs.

On peut aussi construire le tenseur  $C_{i,i'}$ , analogue au tenseur  $R_{i,i'}$ , tel que

$$C_{i,i'}(\epsilon_c) = H(\epsilon_c - c(i, i')) \quad (5.14)$$

avec  $\epsilon_c$ , le seuil qu'on prendra supérieur à 0.5.  $C_{i,i'}$  est donc une fonction indicatrice de récurrence en terme de corrélation.

## Comparaison sur les deux méthodes

La première méthode permet d'identifier une récurrence lorsque la dynamique repasse dans le voisinage d'une ancienne configuration de vorticité. On peut alors identifier des structures dont la forme et l'amplitude sont identiques.

La seconde méthode est basée sur la co-linéarité des vecteurs  $\Omega_{i,j}$ . Elle permet donc de capturer des structures récurrentes de mêmes formes mais dont les amplitudes peuvent être différentes. Elle est donc moins restrictive que la première méthode, ce qui la rend moins sensible au bruit.

### 5.5.3 Analyse d'un tracé de récurrence pour $Rh = 30$

Nous présentons dans cette section une comparaison entre les deux méthodes introduites dans la partie précédente. On choisit une mesure à  $Rh$  égal à 30 avec  $N_t = 5.10^3$  points. Les matrices  $r_{i,i'}$  (à gauche) et  $c_{i,i'}$  (à droite) sont représentées sur la figure 5.22 avec  $i$  et  $i'$  compris entre 1 et  $2.10^3$ .

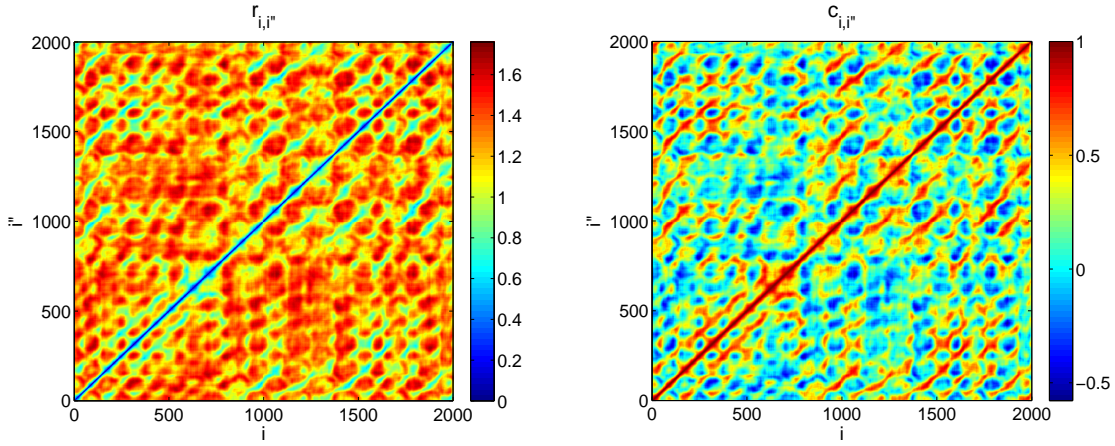


FIGURE 5.22 – Gauche : matrice  $r_{i,i'}$  des distances entre les vecteurs  $\omega_{i,j}$  et  $\omega_{i',j}$  pour  $Rh = 30$ . Droite, matrice  $c_{i,i'}$  des corrélations entre les vecteurs  $\Omega_{i,j}$  et  $\Omega_{i',j}$  pour  $Rh = 30$ .

Sur ces figures, l'abscisse correspond à l'indice  $i$  et l'ordonnée à l'indice  $i'$ . Sur la figure de gauche, la ligne  $i' = i$  correspond à la valeur  $r_{i,i} = 0$  en bleu. Le système repasse proche d'une configuration lorsque la zone est indiquée par la gamme de couleurs allant du bleu au vert. Sur la figure de droite où  $c_{i,i'}$  est représentée, la gamme de couleur est inversée. Les zones rouges autres que celles proches de la diagonale correspondent aux récurrences. On constate qu'il existe des séquences où le système repasse à proximité d'une configuration donnée.

Pour déterminer le seuil  $\epsilon$  de la fonction  $R_{i,i'}$ , on a calculé la distributions  $p(r_{i,i'})$  des distances, tracée sur la courbe 5.23 de gauche. La fonction de répartition  $P(r_{i,i'})$  associée est représentée sur la figure de droite. Sur les deux courbes, le rond rouge correspond à la valeur moyenne  $\langle r_{i,i'} \rangle$  qui vaut 1.22 et le rond bleu au seuil  $\epsilon = 0.97$  où  $P(\epsilon) = 0.1$ .

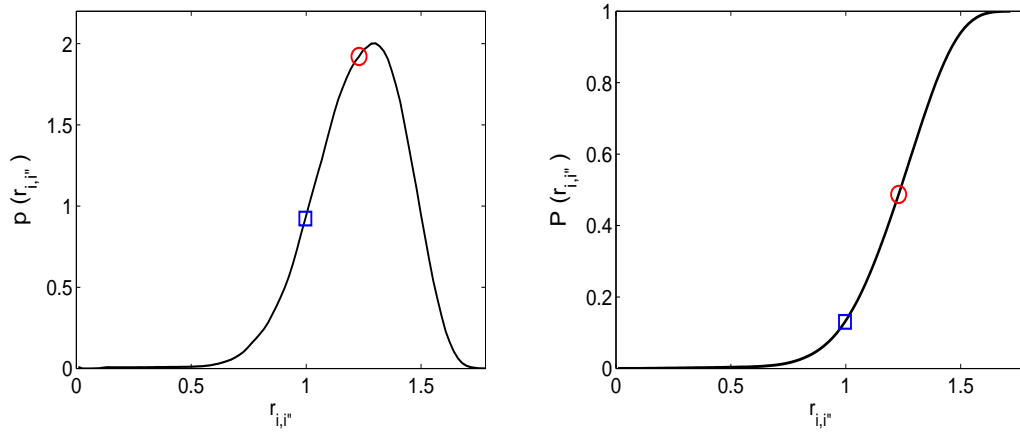


FIGURE 5.23 – Gauche : distribution  $p(r_{i,i'})$  des distances entre les vecteurs  $\omega_{i,j}$  et  $\omega_{i',j}$  pour  $Rh = 30$ . Gauche : la fonction de répartition  $P$  de  $p$ . Le rond rouge correspond à la moyenne de  $r_{i,i'}$  et le carré bleu au seuil  $\epsilon$  tel que  $P(r_{i,i'}) = 0.1$ .

À partir de la valeur de  $\epsilon$ , on a représenté le tracé de récurrence  $R_{i,i'}(\epsilon)$  sur la figure 5.24 de gauche. L'abscisse correspond à l'indice  $i$  et l'ordonnée à l'indice  $i'$ . Les zones blanches sont associées aux valeurs  $R_{i,i'} = 0$  et les zones noires aux valeurs  $R_{i,i'} = 1$ . Les points noirs en dehors de la diagonale correspondent donc au moment où il y a une structure récurrente. Sur la figure de droite,  $C_{i,i'}(\epsilon_c)$  est tracée pour  $\epsilon_c = 0.55$  avec le même code couleur. On constate que les deux courbes sont très similaires et qu'il existe bien des récurrences dans la dynamique.

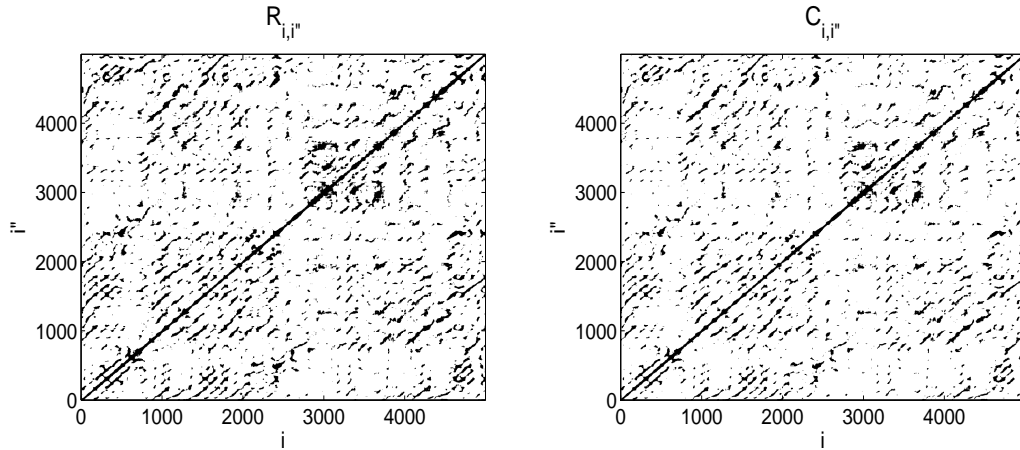


FIGURE 5.24 – Gauche : tracés de récurrences avec la matrice  $R_{i,i'} = H(\epsilon - r_{i,i'})$  avec  $\epsilon = 0.27$ . Les points blancs correspondent à  $R_{i,i'} = 0$  et les points noirs  $R_{i,i'} = 1$ . Droite, matrice  $C_{i,i'} = H(\epsilon_c - c_{i,i'})$  avec  $\epsilon_c = 0.55$ .

Cette similarité est d'autant plus visible lorsque l'on observe une ligne des fonctions  $r_{i,i'}$  et  $c_{i,i'}$ . Sur la figure 5.25, on a représenté  $\epsilon - r_{i,i'}$  à gauche et  $c_{i,i'}$  à droite pour

$i = 2650$ . Ces deux courbes sont presque identiques, à un facteur de dilatation près. Les droites en rouge correspondent au seuil en-dessous duquel tous les points sont représentés en blanc sur la figure 5.24. Le rond rouge indique l'instant où  $i = i'$ , caractérisé par des pics sur les fonctions  $\epsilon - r_{i,i'}$  et  $c_{i,i'}$ . Le carré bleu correspond à l'indice  $i' = 5271$ , soit 40 secondes après l'instant  $i = 2650$ . Ce point correspond à une récurrence, où le système retourne dans une configuration similaire par rapport à celle de l'instant  $i$ . Les champs de vorticité à l'instant  $i = 2650$  (   gauche) et  $i' = 5271$  (   droite) sont illustrés sur la figure 5.26. Les champs sont similaires pour un coefficient de cor  relation  $c_{i,i'} \simeq 0.65$ .

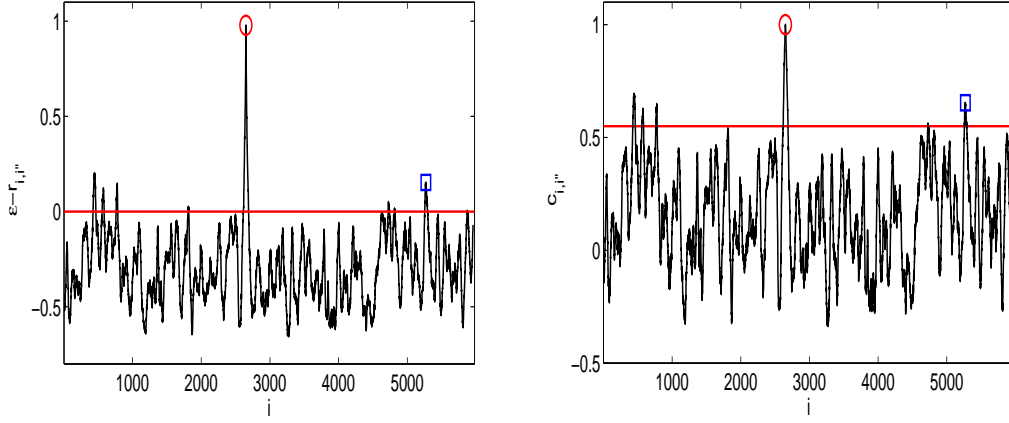


FIGURE 5.25 – Gauche :  $\epsilon - r_{i,i'}$  en fonction de  $i'$  pour  $i=2650$ . Droite :  $c_{i,i'}$  en fonction de  $i'$  pour  $i=2650$  et la ligne rouge correspond au seuil  $c_{i,i'} = 0.55$ . Le rond rouge correspond au point  $i = i'$  et le carré bleu, à l'instant  $i' = 5271$  où le système repasse au voisinage de la configuration au temps  $i$ .

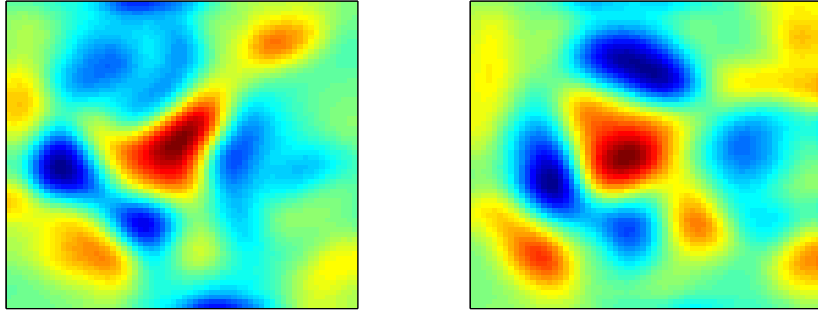


FIGURE 5.26 – Champ de vorticité  $\Omega_{i,j}$  à gauche pour  $i = 2650$  et à droite  $i = 5271$ .

En conclusion de cette partie, on a montré que la méthode usuelle utilisant la fonction  $r_{i,i'}$  pour identifier des récurrences est aussi efficace que la méthode utilisant

$c_{i,i'}$ . Dans la suite de cette section, nous continuerons à utiliser  $c_{i,i'}$  car l'estimation du seuil ne change pas avec le champ spatio-temporel  $\omega_{i,j}$ , contrairement à la première méthode.

#### 5.5.4 Analyse et quantification des récurrences

Nous allons faire l'étude systématique des tracés de récurrences à partir de la fonction  $c_{i,i'}$  pour différents seuils  $\epsilon_c$ . Les tracés de récurrences sont représentés sur la figure 5.27, avec  $\epsilon_c = 0.55$  sur la colonne de gauche et  $\epsilon_c = 0.75$  sur celle de droite, pour  $Rh$  compris entre 23 et 39. On rappelle que l'abscisse correspond à l'indice  $i$  et l'ordonnée à l'indice  $i'$ .

##### Les tracés de récurrences

Pour  $Rh = 28$ , le tracé de récurrence comporte peu de zones noires hors diagonale, qui correspondent à des récurrences. La dynamique est donc fortement chaotique, car les configurations de vorticité sont faiblement corrélées entre elles. Pour  $Rh$  égal à 30, on constate l'apparition de treillis sur les figures, plus visibles sur la colonne de gauche correspondant à  $\epsilon_c = 0.55$ .

Ces treillis sont formés de droites hachurées. On rappelle qu'une ligne (respectivement une colonne) correspond à une configuration de vorticité au temps  $i'$  ( $i$ ) et chaque point noir sur une même ligne représente une valeur de corrélation supérieure à  $\epsilon_c$ . Ainsi une structure est récurrente, lorsqu'elle est associée à la présence d'une droite hachurée sur une ligne.

Pour  $Rh$  égal 35, ces treillis deviennent de plus en plus denses, ce qui indique que la fréquence des récurrences augmente. Elles commencent à être nettement visibles sur la colonne de droite. On n'observe cependant pas de motifs clairement périodiques qui pourraient correspondre à une dynamique temporelle cyclique.

Finalement pour  $Rh$  égal à 39, la dynamique semble rester à proximité d'une configuration de vorticité donnée.

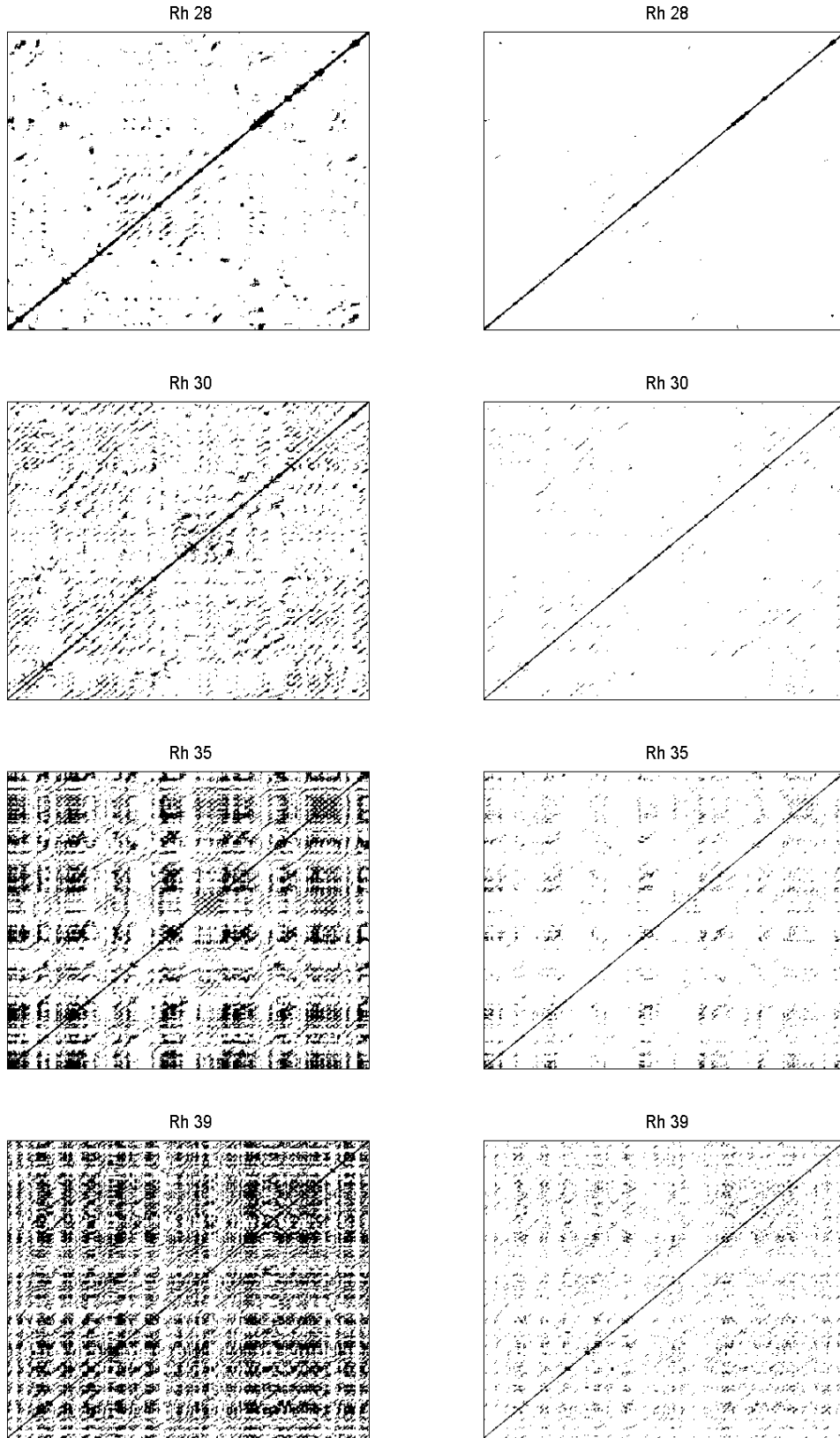


FIGURE 5.27 – Tracés de récurrences  $c_{i,i}(\epsilon_c)$  avec  $\epsilon_c = 0.55$  à gauche et  $\epsilon_c = 0.75$  à droite pour différents  $Rh$  avec de haut en bas  $Rh = [28, 30, 35, 39]$ .



## Distributions des corrélations

Pour quantifier les récurrences indépendamment du seuil  $\epsilon_c$ , nous avons calculé les distributions de  $p(c_{i,i'})$  ainsi que la moyenne  $\langle c_{i,i'} \rangle$ , représentées respectivement à gauche et à droite de la figure 5.28. On constate que pour  $Rh$  égal à 23, la distribution est presque centrée en zéro avec une légère dissymétrie vers les valeurs positives. Lorsque  $Rh$  est plus grand que 30, la courbe se déplace vers les valeurs positives. La distribution se stabilise pour  $Rh > 40$  où son maximum est atteint pour  $c_{i,i'} \simeq 0.6$  et sa valeur moyenne  $\langle c_{i,i'} \rangle \simeq 0.5$ .

La transition entre  $Rh = 30$  et 40 semble être continue, comme l'indique l'évolution de la moyenne de  $c$ .

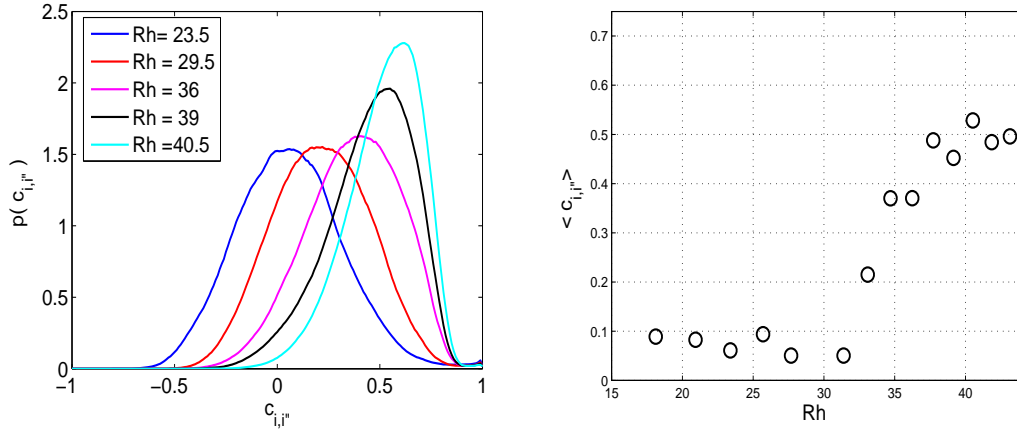


FIGURE 5.28 – Gauche : distribution de  $p(c_{i,i'})$  pour 5 valeurs de  $Rh$  : 23.5, 29.5, 36, 39 et 40.5. Droite : moyenne de  $\langle c_{i,i'} \rangle$  en fonction de  $Rh$ .

## Bilan

Dans cette partie, nous avons montré que pour  $Rh < 30$ , le système explore différentes configurations de champ de vorticité peu corrélées entre elles. Pour  $Rh > 40$ , le système atteint un régime où il passe la majeure partie du temps dans une configuration donnée. Cette dernière configuration doit être en théorie très proche de celle du champ de vorticité moyen pour  $Rh$  supérieur à 40.

Entre les deux, la dynamique va passer de plus en plus de temps dans une ou plusieurs configurations de vorticité récurrentes. On ne connaît pas encore la topologie des configurations qu'explore le système de manière récurrente. Ce point sera développé dans la prochaine section.

### 5.5.5 Moyenne cohérente

#### Méthode

Dans cette section, nous allons étudier la structure du champ de vorticité et le temps passé au voisinage de ces récurrentes.

Nous allons calculer les moyennes cohérentes des vecteurs spatiaux  $\Omega_{i,j}$  sur les différentes récurrentes en fonction du seuil  $\epsilon_c$ . Il faut tout d'abord hiérarchiser ces

différentes structures en fonction du temps total passé dans le voisinage de ces configurations. On définit alors  $T_i$  le pourcentage de temps passé au voisinage du vecteur  $\Omega_{i,j}$

$$T_i = \frac{1}{N_t} \sum_{i'} C_{i,i'}(\epsilon_c) \quad (5.15)$$

Ce temps correspond donc au pourcentage de temps que la fonction  $c(i, i')$  passe au-dessus du seuil  $\epsilon_c$ , pour une configuration  $i$  donnée. La structure la plus probable est alors le maximum de  $T_i$  sur l'ensemble des mesures  $i \in [1, N_t]$  qu'on note  $T^{(1)}$ , l'indice (1) correspond à la première structure la plus visitée. On calcule la moyenne cohérente de la configuration de vorticité la plus probable  $\Omega_j^{(1)}$ , telle que

$$\Omega_j^{(1)} = \frac{1}{T^{(1)} \cdot N_t} \sum_{i'} C_{I,i'}(\epsilon_c) \cdot \Omega_{i',j} \quad (5.16)$$

$\Omega_j^{(1)}$  et  $T^{(1)}$  dépendent bien évidemment du seuil  $\epsilon_c$  choisi.

## Résultats

Les configurations des modes les plus probables  $\Omega_j^{(1)}$  sont représentées sur la figure 5.29 pour  $Rh$  égal à 30 (à gauche), 34 (au centre) et 38 (à droite), et pour  $\epsilon_c = 0.55$  en haut et  $\epsilon_c = 0.75$  en bas. On remarque que le choix du seuil  $\epsilon_c$  ne change pas qualitativement la structure des champs de vorticité. Ces champs ont une structure similaire à celle du champ de vorticité à  $Rh$  plus grand que 40, ce qui confirme l'émergence progressive de l'état condensé.

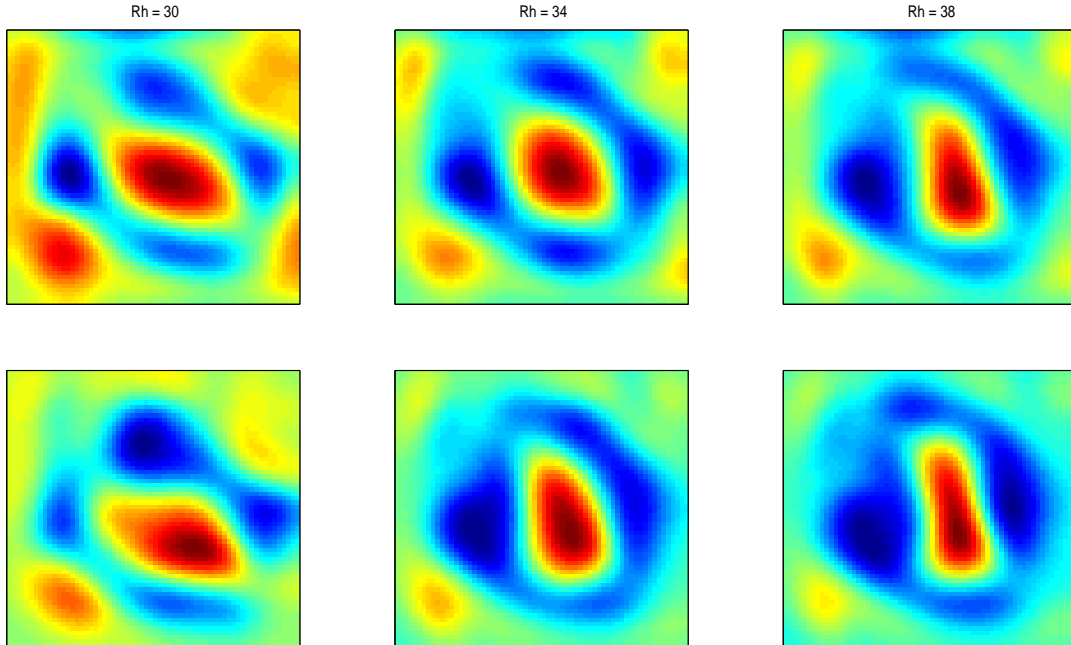


FIGURE 5.29 – Champs de vorticité du mode le plus probable pour  $Rh$  égal à 30 (à gauche), 34 (au centre) et 38 (à droite), et pour  $\epsilon_c = 0.55$  en haut et  $\epsilon_c = 0.75$  en bas

Sur la figure 5.30, on a représenté  $T^{(1)}$  en fonction de  $Rh$  pour différents seuils  $\epsilon_c$ . Quel que soit le seuil  $\epsilon_c$ , les courbes indiquent que le mode le plus probable, qui garde globalement la même configuration de vorticité pour les différents  $Rh$ , va continûment prendre de l'importance dans la dynamique de l'écoulement. En effet, le rapport de  $T^{(1)}$  pour  $Rh$  égal à 40 sur celui à  $Rh$  égal à 25 est de l'ordre de 8 – 10 pour les différents seuils. Par exemple pour  $\epsilon_c = 0.7$ ,  $T^{(1)}$  vaut initialement 3 – 4% pour  $Rh$  plus petit que 30, puis atteint 40% pour  $Rh$  plus grand que 39.

La gamme de  $Rh$  entre 30 et 39 correspondant à la transition vers l'état condensé, est donc caractérisée par l'émergence d'une configuration préférentielle de vorticité.

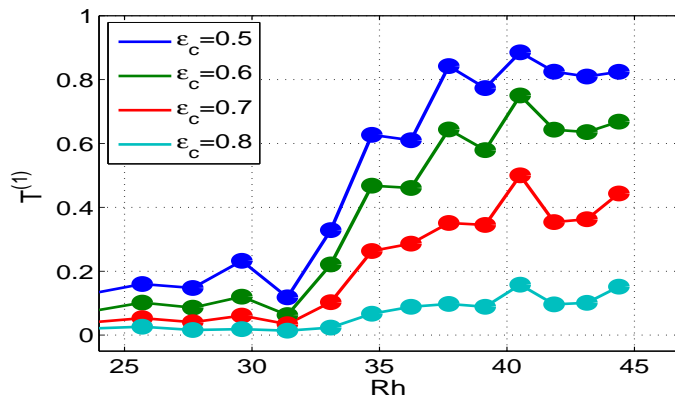


FIGURE 5.30 – Pourcentage du temps passé dans le mode le plus probable en fonction des seuils  $\epsilon_c$  et  $Rh$ .

Cependant, même avec un seuil assez bas avec  $\epsilon_c$  égal à 0.5, seulement 80% de la dynamique est capturée par cette méthode. Même si le système passe du temps proche d'une configuration donnée, l'écoulement reste chaotique et peut explorer des configurations différentes de vorticité.

## 5.6   tude de l'état condensé

### Structure de l'écoulement

Dans la section précédente, nous avons constaté que l'écoulement optait pour une configuration préférentielle du champ de vorticité pour  $Rh > 30$ . Cette structure est constituée (cf figure 5.29) d'un vortex central tournant dans le sens opposé au sens de la circulation. Il est entouré de quatre vortex co-rotatifs avec la circulation formant ainsi une croix à quatre branches. La vorticité semble donc être dominée par les composantes de Fourier  $(n_x, n_y) = (3, 3)$  et  $(1, 3)$ .

En effet, la décomposition de Fourier du champ de vorticité du mode le plus probable montre qu'entre 25 et 30% de la vorticité du mode est comprise dans le mode  $(3, 3)$  pour  $Rh > 36$ . De plus, la composante du mode de forçage  $(2, 4)$  est très faible et contribue à moins de 5% de la vorticité.

Dans le chapitre 3, ces composantes de Fourier constituaient la base du modèle de basse dimension pour décrire la première bifurcation supercritique à  $Rh = 1.55$ . Les modes sélectionnés étaient le mode  $(1, 1)$ , correspondant à la circulation à grande

échelle, le mode de forçage  $(2, 4)$  et quatre autres modes permettant les interactions triadiques entre les deux premiers modes, dont les modes  $(3, 3)$  et  $(1, 3)$ .

La présence des modes  $(3, 3)$  indique donc qu'il peut exister des interactions directes entre le mode de forçage et la circulation grande échelle. En reprenant le modèle de basse dimension, on a tracé sur la figure 5.31 le champ de vorticité du mode saturé issu du modèle (figure de gauche) avec  $Rh = 2Rh_c$  et le champ de vorticité du mode le plus probable pour  $Rh = 30$  et  $\epsilon_c = 0.55$  (figure de droite).

Ces champs de vorticité présentent de fortes similarités, ce qui implique que ces modes doivent jouer un rôle important dans la dynamique de l'état condensé.

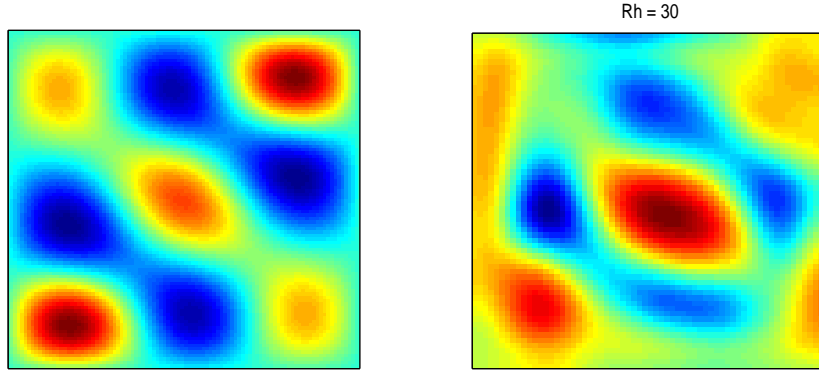


FIGURE 5.31 – Gauche : champ de vorticité obtenue grâce au modèle du chapitre 4 pour  $Rh^* = 2Rh_c^*$ . Droite : champ de vorticité du mode le plus probable pour  $Rh = 30$ .

Il en est de même pour les  $Rh$  supérieurs à 35. On a représenté sur la figure 5.32 le champ de vorticité (figure de gauche) et la fonction de courant (figure de droite). La figure du haut correspond au mode saturé donné par le modèle pour  $Rh \gg Rh_c^*$ , et en bas les champs moyens expérimentaux pour  $Rh$  égal à 39. Les lignes de courants dans les deux cas indiquent la présence des quatre vortex co-rotatifs avec la circulation grande échelle ainsi que le vortex central contra-rotatif. Sur le champ de vorticité, on retrouve aussi la signature de ces vortex.

Évidemment, ces deux champs ne sont pas identiques. En effet, le modèle ne prend en compte qu'un faible nombre de modes avec des conditions de glissement au parois et un forçage simplifié par rapport à la configuration expérimentale. Il reste néanmoins que dans ces deux configurations, le mode  $(3, 3)$  domine la vorticité aux dépens du mode de forçage  $(2, 4)$ , qui est pourtant dominant dans les champs moyens de vorticité pour  $Rh < 30$ .

L'analogie entre le modèle de basse dimension et les champs expérimentaux suggère donc que dans le régime condensé, les grandes échelles rétroagissent sur le mode de forçage par l'intermédiaire du mode  $(3, 3)$  et  $(1, 3)$ .

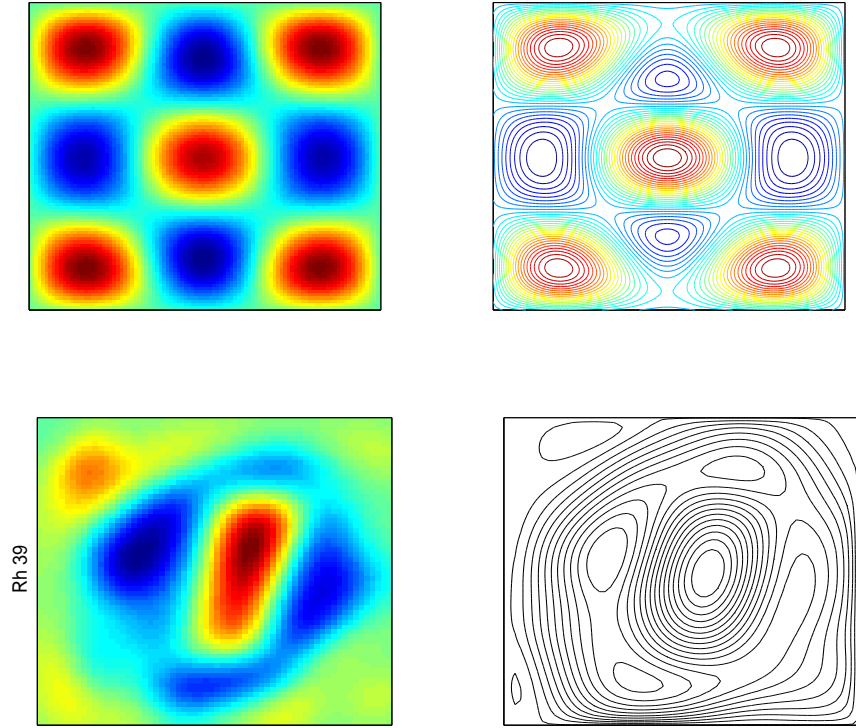


FIGURE 5.32 – Droite : champ de vorticité. Gauche : lignes de courant. Les figures en haut sont obtenues avec le modèle de basse dimension pour  $Rh \gg Rh_c^*$ . Les figures du bas correspondent aux champs moyens de vorticité et des lignes de courant pour le mode le plus probable à  $Rh = 39$ .

### Décomposition en série Fourier du champ de vitesse

Nous avons discuté de manière qualitative de la structure du régime condensé à partir des champs de vorticité filtrés. Pour quantifier plus précisément l'émergence des différents modes, nous allons calculer leur énergie à partir des champs de vitesse non filtrés.

La mesure étant inhomogène spatialement, comme l'illustre la figure 5.33, nous projetons les modes de Fourier sur une grille spatiale non-uniforme. Nous souhaitons ainsi quantifier l'apparition des modes  $(3, 3)$  et  $(1, 3)$ .

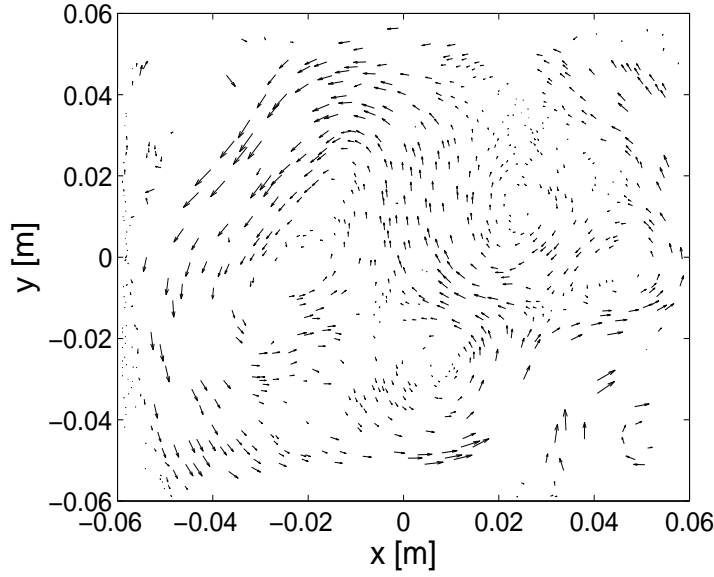


FIGURE 5.33 – Instantané d'un champ de vitesse non-uniforme sur lequel sont calculés les modes de Fourier.

### Méthode

Le champ de vitesse est décomposé sur les 25 premiers modes de Fourier avec  $n_x$  et  $n_y$  compris entre 1 et 5. Ces modes correspondent aux grandes échelles dans l'écoulement. Les composantes de Fourier sont alors égales à

$$\begin{aligned}\hat{u}(n_x, n_y, t) &= \frac{1}{C_x(x_i, y_i)} \sum_{x_i, y_i} \cos\left(n_x \frac{\pi}{L} x_i\right) \sin\left(n_y \frac{\pi}{L} y_i\right) u_x(x_i, y_i, t) \\ \hat{v}(n_x, n_y, t) &= \frac{1}{C_y(x_i, y_i)} \sum_{x_i, y_i} \sin\left(n_x \frac{\pi}{L} x_i\right) \cos\left(n_y \frac{\pi}{L} y_i\right) u_y(x_i, y_i, t)\end{aligned}\tag{5.17}$$

avec  $u_x(x_i, y_i)$  et  $u_y(x_i, y_i)$  les composantes du champ de vitesse où  $(x_i, y_i)$  est la position de la particule. Le centre du repère correspond au centre de la cellule. La grille étant non-uniforme (cf figure 5.33), les composantes de Fourier sont normalisées par les constantes  $C_x(x_i, y_i)$  et  $C_y(x_i, y_i)$  valant

$$\begin{aligned}C_x(x_i, y_i) &= \sum_{x_i, y_i} \cos\left(n_x \frac{\pi}{L} x_i\right)^2 \sin\left(n_y \frac{\pi}{L} y_i\right)^2 \\ C_y(x_i, y_i) &= \sum_{x_i, y_i} \sin\left(n_x \frac{\pi}{L} x_i\right)^2 \cos\left(n_y \frac{\pi}{L} y_i\right)^2\end{aligned}\tag{5.18}$$

Si la grille contient assez de points répartis de façon homogène,  $C_x$  et  $C_y$  valent  $N_p/4$  avec  $N_p$  le nombre de particules.

## Étude des champs moyens de vitesses

Nous allons tout d'abord étudier le champ moyen de vitesse  $\langle u_x \rangle$  et  $\langle u_y \rangle$ , avec  $\langle \cdot \rangle$  la moyenne temporelle. La décomposition modale du champ moyen de vitesse est représentée sur la figure 5.34. L'énergie sur chaque mode  $\langle \hat{u} \rangle^2 + \langle \hat{v} \rangle^2$  est normalisée par l'énergie totale sur les modes  $\Sigma(\langle \hat{u} \rangle^2 + \langle \hat{v} \rangle^2)$ . Les ronds bleus correspondent au pourcentage d'énergie sur le mode (1, 1), les carrés noirs au mode (2, 4) et les losanges rouges aux modes (3, 3) et (1, 3).

On remarque la décroissance du mode de forçage au profit des modes (1, 3) et (3, 3). La courbe associée à l'énergie sur le mode (2, 4) coupe celle associée aux modes (3, 3) et (1, 3) dans la gamme de  $Rh$  correspondant à la transition vers l'état condensé. Elles saturent à partir de  $Rh = 40$  où elles atteignent un plateau.

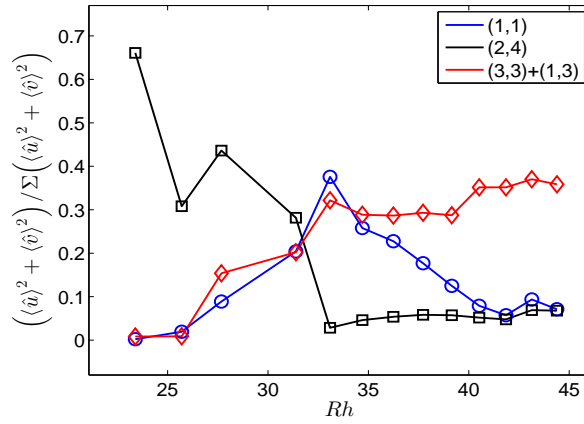


FIGURE 5.34 – Densité d'énergie des composantes de Fourier du champ moyen de vitesse renormée par l'énergie totale du champ moyen. Les ronds bleus correspondent au modes (1, 1), les carrés noirs au mode (2, 4) et les losanges rouges aux modes (3, 3) et (1, 3).

Quant à la composante grande échelle (1, 1), sa courbe croît sur la plage de  $Rh = 25$  à 33, puis décroît pour  $Rh > 33$  pour se stabiliser vers  $Rh \simeq 40$ . La croissance initiale est sans doute due au fait que le système passe de plus en plus de temps sur le mode le plus probable décrit précédemment.

## Étude de l'énergie moyenne sur les modes

Nous allons maintenant étudier l'énergie moyenne sur les modes, définie par  $\langle \hat{u}_x^2 \rangle + \langle \hat{u}_y^2 \rangle$ . Cette grandeur est différente de l'énergie sur les champs moyens  $\langle \hat{u}_x \rangle^2 + \langle \hat{u}_y \rangle^2$ , présentée dans la section précédente, car elle comporte en plus la contribution des fluctuations. L'énergie moyenne normalisée par l'énergie totale sur les modes (1, 1), (2, 4) et (3, 3) + (1, 3) est représentée sur la figure 5.35 de gauche.

L'énergie moyenne a globalement le même comportement que l'énergie sur les champs moyens (cf figure 5.34) pour les différentes composantes de Fourier. On constate cependant que l'énergie sur le mode (2, 4) est beaucoup plus faible et représente à peine 5% de l'énergie totale.

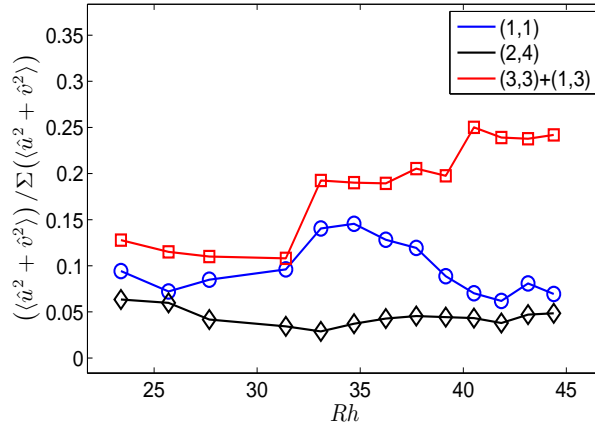


FIGURE 5.35 – Énergie moyenne des composantes de Fourier normalisée par l'énergie totale. Les ronds bleus correspondent au modes (1, 1), les carrés noirs au mode (2, 4) et les losanges rouges aux modes (3, 3) et (1, 3)

### 5.6.1 Mécanisme de sélection de l'état condensé

La structure du champ de vorticité de l'état condensé semble être déterminée par la structure du mode de forçage. En effet, l'émergence des modes (1, 3) et (3, 3) peut être expliquée par l'interaction non-linéaire du mode grande échelle (1, 1) avec le mode du forçage (2, 4).

Nous allons décrire le mécanisme de sélection de la structure de l'état condensé proposé par Gallet et Young [23] dans le cadre d'un écoulement bidimensionnel dont le forçage est périodique spatialement.

#### Mécanisme de sélection

Les auteurs ont montré dans cet article que la circulation à grande échelle saturait dans la limite haut Reynolds et  $Rh^{-1} = 0$ . Ce résultat est surprenant car la circulation sature même sans la présence d'une dissipation à grande échelle assurée par la friction. En utilisant une approche quasi-linéaire, ils ont calculé analytiquement l'amplitude du mode  $(n_x, n_y) = (1, 1)$  en décomposant la fonction de courant en trois composantes

1. La composante grande échelle, donnée par la composante de Fourier (1, 1). Cette composante est associée aux champs de vitesse et de vorticité  $(\mathbf{v}_0, \omega_0)$ .
2. Les composantes de la fonction courant restantes ayant les mêmes symétries que le forçage. Le champ de vitesse du mode (2, 4) est symétrique dans notre écoulement par réflexion selon  $0x$  et  $0y$ . Cette composante est associée aux champs de vitesse et de vorticité  $(\mathbf{v}_s, \omega_s)$ .
3. Les composantes de la fonction courant restantes ayant les symétries opposées à celles du forçage. Les composante (3, 3) et (1, 3) du champ de vitesse sont anti-symétriques par réflexion selon  $0x$  et  $0y$ . Cette composante est associée aux champs de vitesse et de vorticité  $(\mathbf{v}_a, \omega_a)$ .



Ces composantes déterminent un système à trois modes. Les auteurs supposent aussi que la vorticité est dominée par  $\omega_s$  et  $\omega_a$ , alors que l'amplitude de  $v_0$  est plus grande que celle de  $v_a$  et  $v_s$ . L'amplitude de chaque mode est sélectionnée par la phénoménologie suivante

- Prenons l'équation de la vorticité stationnaire pour les composantes symétriques

$$[Re^{-1}\Delta - Rh^{-1}]\omega_s = \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \omega_a + \mathbf{v}_a \cdot \nabla \omega_0 - (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{e}_z \quad (5.19)$$

Dans la limite faible dissipation, le forçage équilibre le terme non-linéaire  $\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \omega_a$ , sélectionnant ainsi l'amplitude de la composante anti-symétrique  $(\mathbf{v}_a, \omega_a)$  en fonction de l'amplitude de la grande échelle

$$\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \omega_a \simeq (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{e}_z. \quad (5.20)$$

- Quant à l'équation de la vorticité pour les composantes anti-symétriques, la dissipation ne peut pas être négligée car elle équilibre l'advection grande échelle de la partie anti-symétrique  $\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \omega_s$

$$[Re^{-1}\Delta - Rh^{-1}]\omega_a \simeq (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \omega_s). \quad (5.21)$$

L'amplitude de la composante symétrique  $(\mathbf{v}_s, \omega_s)$  dépend donc de l'amplitude de la grande échelle et de  $\omega_a$ , qui est aussi une fonction du forçage et de la grande échelle.

- Finalement, l'écoulement à grande échelle est forcé par l'interaction entre les composantes symétrique et anti-symétrique tel que

$$[2\pi^2 Re^{-1} - Rh^{-1}]\omega_0 = \iint (\mathbf{v}_s \cdot \nabla \omega_a + \mathbf{v}_a \cdot \nabla \omega_s) \sin(\pi x) \sin(\pi y) dS. \quad (5.22)$$

Grâce aux deux équations précédentes 5.21 et 5.20, les auteurs ont exprimé  $\omega_0$  uniquement en fonction du forçage et de la dissipation, car  $\omega_a$  et  $\omega_s$  ne dépendent que du forçage et de l'amplitude de la grande échelle. De plus dans la limite  $Rh^{-1} = 0$ , les auteurs montrent que l'amplitude de la grande échelle est indépendante de la dissipation donnée par le nombre de Reynolds  $Re$ .

## Comparaison avec l'expérience

Le modèle de Gallet et Young [23] est plus complet que le modèle à trois modes décrit dans le chapitre 3, car il comporte plus de modes, même si nous observons que la composante antisymétrique de la vorticité dans notre écoulement est dominée par les modes (1, 3) et (3, 3).

Le schéma 5.36 résume le mécanisme de sélection. Les modes (1, 3) + (3, 3) permettent le transfert direct d'énergie des échelles du forçage à l'écoulement à grande échelle. Réciproquement, l'interaction de (1, 3) + (3, 3) avec (1, 1) permet une rétroaction de la composante grande échelle sur le mode du forçage. Finalement, les modes (1, 3) + (3, 3) sont entretenus par l'advection différentielle<sup>3</sup> du mode (2, 4).

---

<sup>3</sup>qui comprend advection et cisaillement

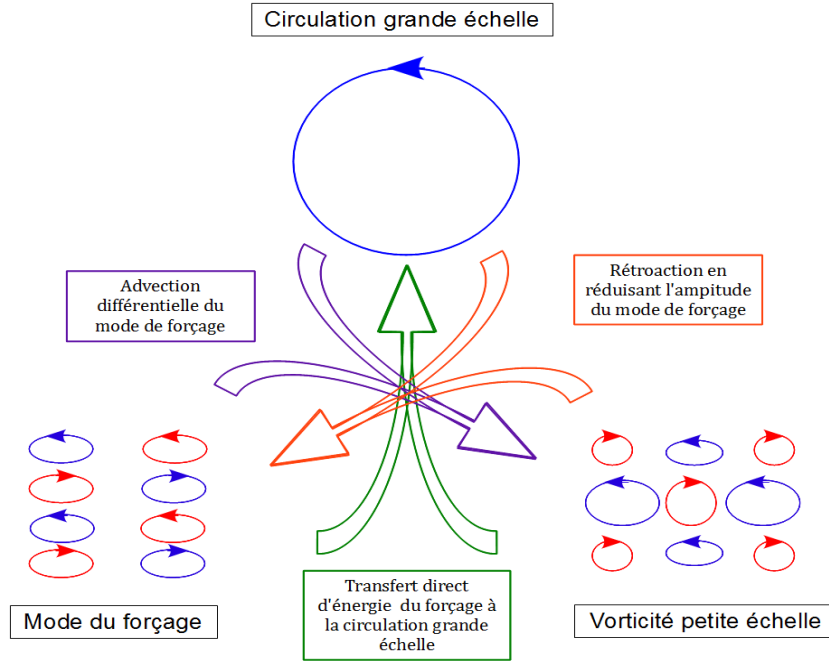


FIGURE 5.36 – Illustration du mécanisme de sélection de la structure à haut  $Rh$ . L'écoulement à grande échelle (en haut) est entretenu par des interactions entre le mode du forçage (en bas à gauche) et les structures tourbillonnaires (en bas à droite). Les structures tourbillonnaires sont dues à l'advection différentielle (advection+cisaillement) du mode du forçage par l'écoulement grande échelle. Quant au mode du forçage, son amplitude est réduite par la rétroaction non-linéaire du mode grande échelle et des structures tourbillonnaires.

### 5.6.2 Conclusion

Nous avons montré dans cette section que l'état condensé était caractérisé par l'émergence des modes  $(1, 3)$  et  $(3, 3)$  dans la structure de l'écoulement. Le mode  $(2, 4)$  sur lequel le forçage a une forte projection et qui domine la structure de l'écoulement moyen pour  $Rh < 30$ , comporte seulement une faible portion de l'énergie dans le régime condensé.

La croissance des modes  $(1, 3) + (3, 3)$  et la décroissance du mode  $(2, 4)$  peuvent être analysées en terme de système à trois modes avec la composante à grande échelle  $(1, 1)$ . Ce mécanisme est analogue à celui proposé par Gallet et Young [23].

## 5.7 Conclusion sur les différentes transitions

Dans ce chapitre, nous avons identifié deux transitions successives de l'écoulement turbulent à  $Rh_c = 12$  et  $Rh = 30$ . La première bifurcation est caractérisée par un changement de forme de la distribution de  $U_L$ , la vitesse moyenne entre le centre de la cellule et la paroi. Initialement gaussienne pour  $Rh < Rh_c$ , la distribution s'aplatit progressivement autour de la valeur zéro pour graduellement présenter deux maxima.

Ce changement de forme est bien décrit par la décomposition de la distribution en deux gaussiennes centrées en  $\pm U_m$  et de variance  $\sigma^2$ .  $U_m$  subit alors une bifurcation avec un comportement critique  $U_m \sim (Rh - Rh_c)^{1/4}$ . Quant à la variance  $\sigma^2$ , elle varie continûment à la bifurcation.

La seconde transition est caractérisée par l'émergence progressive d'une configuration particulière de vorticité dans l'écoulement à partir de  $Rh > 30$ . Nous avons quantifié cette bifurcation en identifiant les récurrences dans le champ de vorticité. Cette étude nous a permis de montrer que l'écoulement passait graduellement de plus en plus de temps proche d'une configuration de vorticité dominée par les modes de Fourier  $(1, 3)$  et  $(3, 3)$  et ayant une faible projection sur le mode du forçage  $(2, 4)$ . La structure de cet écoulement est en accord avec le mécanisme de sélection de la structure de l'état condensé proposé par Gallet et Young [23].

# Chapitre 6

## Renversements de la circulation à grande échelle

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Présentation . . . . .</b>	<b>137</b>
<b>6.2</b>	<b>Statistiques . . . . .</b>	<b>137</b>
6.2.1	Détection des renversements . . . . .	137
6.2.2	Fréquence des renversements . . . . .	139
6.2.3	Distribution des durées entre renversements . . . . .	141
6.2.4	Fluctuations de $U_L$ . . . . .	142
6.2.5	Bilan . . . . .	143
<b>6.3</b>	<b>Comparaison des renversements pour deux <math>Rh</math> différents</b>	<b>143</b>
<b>6.4</b>	<b>Dynamique des renversements . . . . .</b>	<b>150</b>
6.4.1	Introduction . . . . .	150
6.4.2	Dynamique d'un renversement à $Rh = 42$ . . . . .	151
6.4.3	Comparaison avec un autre renversement . . . . .	154
6.4.4	Bilan . . . . .	155
<b>6.5</b>	<b>Discussion sur le mécanisme des renversements . . . . .</b>	<b>156</b>
6.5.1	Études antérieures . . . . .	156
6.5.2	Une dynamique de basse dimension . . . . .	157
<b>6.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>160</b>

---

## 6.1 Présentation

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que pour  $Rh$  plus grand que 30, une circulation cohérente à grande échelle apparaissait. L'écoulement est cohérent car il passe une grande partie du temps proche d'une configuration de vorticité particul  re qu'on nomme état condensé.

Le forçage ne favorisant aucun sens de circulation, l'écoulement à grande échelle peut initialement tourner dans le sens horaire ou anti-horaire. Nous avons tracé sur la figure 6.1, une série temporelle de  $U_L$  (en gris) et  $\bar{U}_L$  (en noir), la composante filtrée de  $U_L$ <sup>1</sup>, pour  $Rh = 38$ . On rappelle que  $U_L$  est la vitesse moyennée spatialement entre le centre et le bord de la cellule. On constate donc que l'écoulement peut continuellement transiter d'un sens de rotation à l'autre, avec des renversements qui semblent distribués aléatoirement dans le temps.

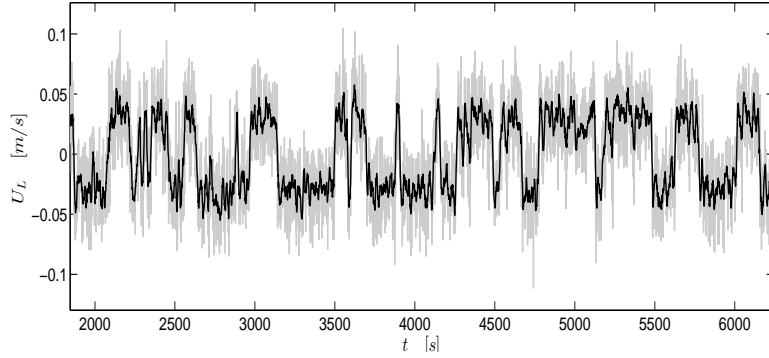


FIGURE 6.1 – Série temporelle de  $U_L$  (en gris) avec  $Rh = 38$ . La courbe en noir représente  $\bar{U}_L$ , la vitesse  $U_L$  filtrée par un filtre à moyenne glissante.

Nous présentons dans ce chapitre les propriétés statistiques et la dynamique de ces renversements.

## 6.2 Statistiques

### 6.2.1 Détection des renversements

Avant d'étudier les statistiques des renversements, il nous faut élaborer un protocole pour définir un renversement. Le premier critère pour définir un renversement est l'instant où la vitesse  $U_L$  change de signe.

Cependant le signal direct (en gris sur la figure 6.1) présente d'importantes fluctuations coupant souvent la valeur zéro. La vitesse  $U_L$  peut alors changer de signe, même si le signal filtré (en noir) indique que le système est toujours dans le même   tat. Le signal doit être au préalable filtré pour enlever ces fluctuations. Un des paramètres pour définir un renversement est donc le temps caractéristique du filtre  $\tau_m$ . Le filtre

---

<sup>1</sup>Ce filtre est une moyenne glissante, effectuant la moyenne sur les 10 secondes avant et après le point considéré.

utilisé est un filtre à moyenne glissante, où la valeur au temps  $t$  du signal filtré est égale à la valeur moyenne du signal sur l'intervalle  $[t - \tau_m, t + \tau_m]$ .

De plus, pendant certains renversements,  $\bar{U}_L$  peut couper plusieurs fois la valeur zéro, comme l'illustre le renversement de la figure 6.2. Pour ne compter qu'une fois ce même renversement, nous fixons un seuil  $\delta T_s$  définissant le temps minimal entre deux renversements. Si le signal filtré coupe plusieurs fois la valeur zéro pendant l'intervalle de temps  $\delta T_s$ , un seul renversement sera décompté.

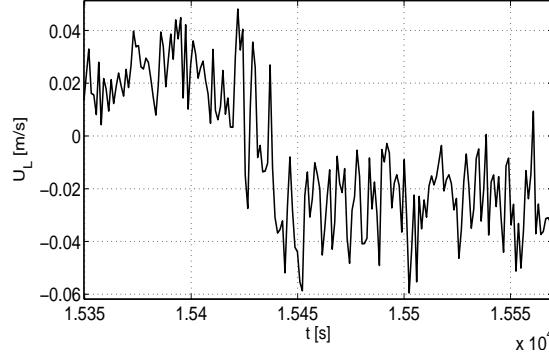


FIGURE 6.2 – La vitesse  $U_L$  en fonction du temps pour  $Rh = 49.5$ , indiquant de fortes fluctuations du signal lors d'un renversement.

Nous avons illustré ce traitement sur la figure 6.3. La vitesse moyenne  $U_L$  est représentée sur la figure de gauche, et la vitesse filtrée  $\bar{U}_L$  avec  $\tau_m = 20$  est tracée sur la figure de droite. Les ronds rouges correspondent aux renversements identifiés avec  $\delta T_s = 10s$ .

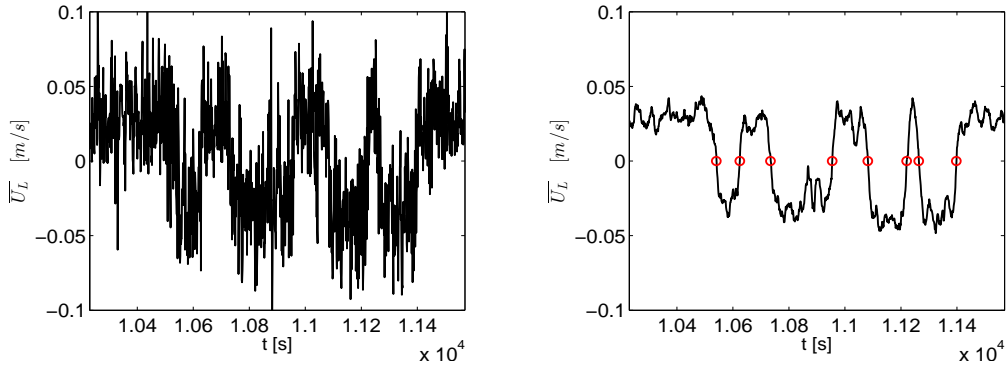


FIGURE 6.3 – Gauche : série temporelle de  $U_L$  pour  $Rh = 38$ . Droite : série temporelle de  $\bar{U}_L$  avec  $\tau_m = 20s$ . Les ronds rouges correspondent à la détection d'un renversement.

On définit alors la fréquence des renversements  $F_r$  égale à

$$F_r = \frac{N_r}{T_f} \quad (6.1)$$

avec  $N_r$  le nombre de renversements pendant la durée  $T_f$  de la mesure.

## 6.2.2 Fréquence des renversements

### Fréquence des renversements en fonction de $Rh$

La fréquence des renversements adimensionnée par  $\tau_c$  en fonction de  $Rh$  est tracée sur la figure 6.4. On observe une décroissance de la fréquence des renversements en fonction de  $Rh$ .

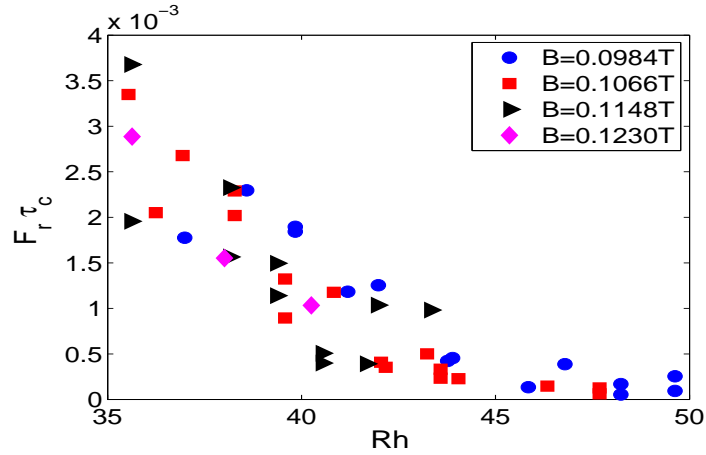


FIGURE 6.4 – Fréquence moyenne des renversements  $F_r$  adimensionnée par  $\tau_c$  en fonction de  $Rh$ , avec  $\tau_m = 20s$  et  $\delta T_s = 10s$ . Les ronds bleus correspondent aux mesures avec un champ magnétique de  $B = 0.098T$ , les carrés rouges à  $B = 0.10T$ , les triangles noirs à  $B = 0.11T$  et les losanges magenta à  $B = 0.12T$ .

Comme le temps  $\tau_c$  varie peu sur la gamme des champs magnétiques appliqués, nous avons représenté la fréquence des renversements en fonction de  $Rh$  sur la figure 6.5, pour montrer les ordres de grandeur des fréquences des renversements. On constate que la fréquence passe d'environ 35 renversements par heure pour  $Rh$  faible à 1 à 2 renversements par heure pour  $Rh > 45$ .

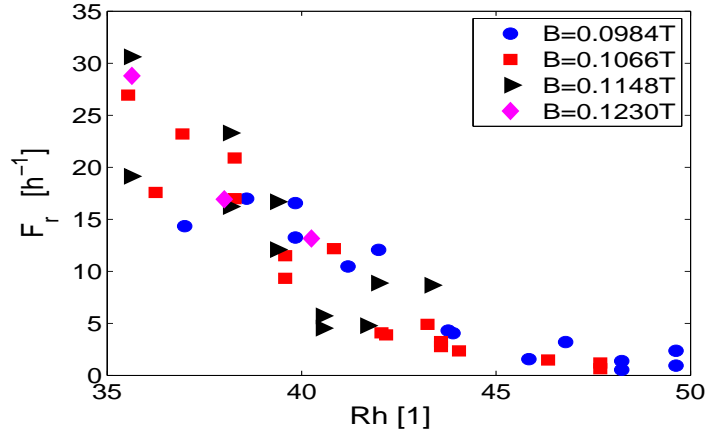


FIGURE 6.5 – Fréquence moyenne des renversements  $F_r$  exprimée en renversements par heure en fonction de  $Rh$ , avec  $\tau_m = 20s$  et  $\delta T_s = 10s$ . Les ronds bleus correspondent aux mesures avec un champ magnétique de  $B = 0.098T$ , les carrés rouges à  $B = 0.10T$ , les triangles noirs à  $B = 0.11T$  et les losanges magenta à  $B = 0.12T$ .

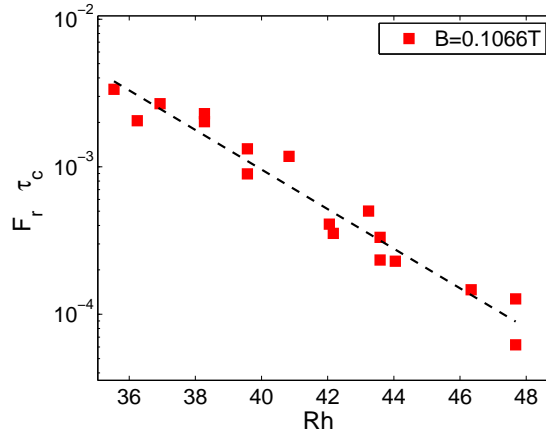


FIGURE 6.6 – Fréquence moyenne des renversements  $F_r$  en fonction de  $Rh$  pour  $B = 0.10T$ , en échelle semi-logarithmique, avec  $\tau_m = 20s$  et  $\delta T_s = 10s$ .

La fréquence des renversements adimensionnée est représentée sur la figure 6.6 en fonction de  $Rh$  pour  $B = 0.1 T$  en échelle semi-logarithmique. Cette courbe indique que la décroissance est exponentielle, avec

$$F_r = \tau_c^{-1} A \exp(-\alpha Rh) \quad (6.2)$$

où  $\alpha$  est une constante réelle et positive, valant  $\alpha = 0.29$ .

### Sensibilité de la fréquence aux paramètres de détection

Nous souhaitons connaître la sensibilité de la fréquence  $F_r$  en fonction des paramètres  $\tau_m$ , le temps de moyenne du filtre, et  $\delta T_s$ , la durée minimale entre deux renversements.



Nous avons représentés uniquement les mesures avec  $B = 0.106T$ .

Sur la figure 6.7 de gauche, la fréquence des renversements est tracée en fonction de  $Rh$  avec  $\tau_m = 10s$  (ronds bleus),  $\tau_m = 20s$  (carrés rouges) et  $\tau_m = 40s$  (losanges noirs). Le seuil  $\delta T_s$  est fixé à  $10s$ .

On constate que la fréquence est une fonction décroissante du temps  $\tau_m$  pour  $Rh$  constant, même si l'effet est moins sensible pour les  $Rh$  plus grand que 45 pour  $\tau_m \geq 20$  s. En effet dans cette gamme de  $Rh$ , les renversements sont rares et bien identifiables. On remarque que la décroissance de  $F_r$  reste exponentielle en fonction de  $Rh$  pour les différents  $\tau_m$ .

Sur la figure de droite, on a représenté  $F_r$  avec  $\delta T_s = 1s$  (ronds bleus),  $\delta T_s = 20s$  (carrés rouges) et  $\tau_m = 40s$  (losanges noirs). Le temps du filtre  $\tau_m$  est fixé à  $20s$ . On remarque aussi une décroissance des fréquences  $F_r$  en fonction de  $\delta T_s$ , cependant  $F_r(Rh)$  est toujours compatible avec une décroissance exponentielle en fonction de  $Rh$ .

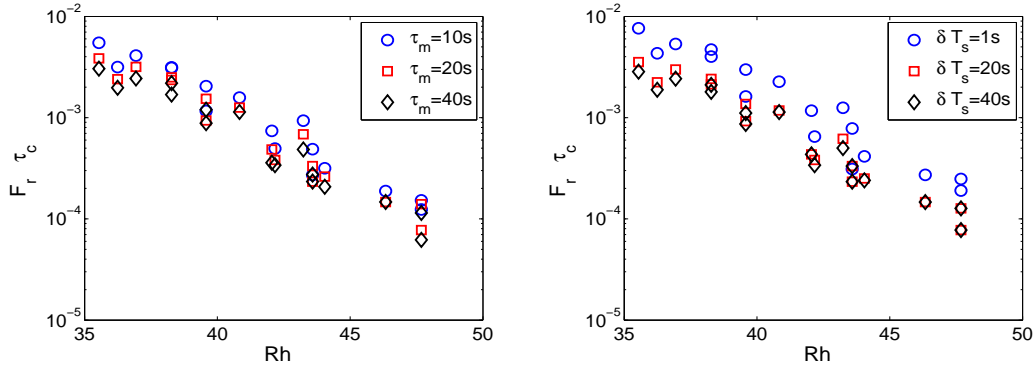


FIGURE 6.7 – Gauche : Fréquence moyenne des renversements  $F_r$  en fonction de  $Rh$  et de  $\tau_m$  avec  $\delta T_s = 10s$ . Droite : Fréquence moyenne des renversements  $F_r$  en fonction de  $Rh$  et de  $\delta T_s$  avec  $\tau_m = 20s$ .

### 6.2.3 Distribution des durées entre renversements

Nous avons choisi la mesure à  $Rh = 38$  et  $B = 0.106T$ , comportant le plus grand nombre de renversements (175), pour calculer la distribution  $P(\tau_{renv})$  des durées  $\tau_{renv}$  entre deux renversements successifs. Nous avons utilisé les paramètres  $\tau_m = 20s$  et  $\delta T_s = 10s$ .

La distribution  $P(\tau_{renv})$  est représentée sur la figure 6.8 de gauche. Cette même courbe est tracée sur une échelle semi-logarithmique sur la figure de droite.

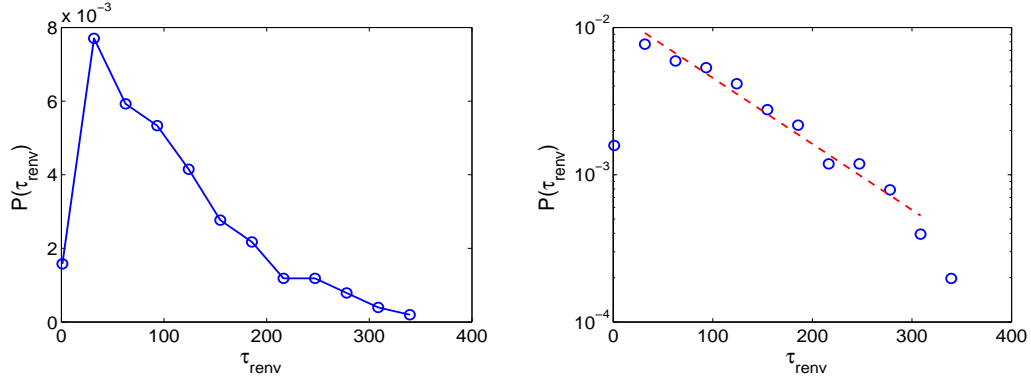


FIGURE 6.8 – Gauche : distribution des durées entre deux renversements  $P(\tau_{renv})$  pour  $Rh = 38$ . Droite : distribution  $P(\tau_{renv})$  en échelle semi-logarithmique.

On constate la présence d'un pic dans la distribution de  $P(\tau_{renv})$  pour  $\tau_{renv} \simeq 40s$ , puis la distribution décroît de manière monotone. Cette décroissance est exponentielle comme l'illustre la figure de droite. Le temps caractéristique de décroissance est de  $96s$ , ce qui fait un temps moyen entre renversements de  $40 + 96 = 136s$ , soit environ 26.5 renversements par heure. Cette valeur est très proche de la fréquence des renversements (figure 6.5) calculée dans la précédente section, avec  $F_r = 25$  renversements par heure.

#### 6.2.4 Fluctuations de $U_L$

Nous avons aussi quantifié l'évolution des fluctuations par rapport à l'amplitude de la circulation. Sur la figure 6.9 de droite, nous avons tracé  $U_L$  (en gris) en fonction du temps pour  $Rh = 35.5$ . Les droites rouges correspondent à  $\pm \langle |U_L| \rangle$ , la moyenne de la valeur absolue de  $U_L$ . On constate que cette valeur correspond bien à l'amplitude moyenne de  $U_L$  dans chaque attracteur. Ainsi les fluctuations peuvent être estimées en calculant la déviation standard de  $|U_L|$  égale à

$$\sigma_{|U_L|} = \langle (|U_L| - \langle |U_L| \rangle)^2 \rangle^{1/2} \quad (6.3)$$

Elle quantifie l'évolution des fluctuations de  $U_L$  autour des valeurs  $\pm \langle |U_L| \rangle$ , comme l'indiquent les droites bleues, donnée par l'ordonnée  $\langle |U_L| \rangle \pm \sigma_{|U_L|}$ .

La déviation standard  $\sigma_{|U_L|}$  est représentée en fonction de  $Rh$  sur la figure 6.9 de droite. On constate qu'elle ne diminue significativement qu'à partir de  $Rh = 42$ . Or entre  $Rh = 35$  et  $Rh = 42$ , la fréquence des renversements a diminué d'au moins 50%. On peut donc conclure que pour cette plage de  $Rh$ , les renversements ne sont pas reliés aux fluctuations de  $U_L$ .

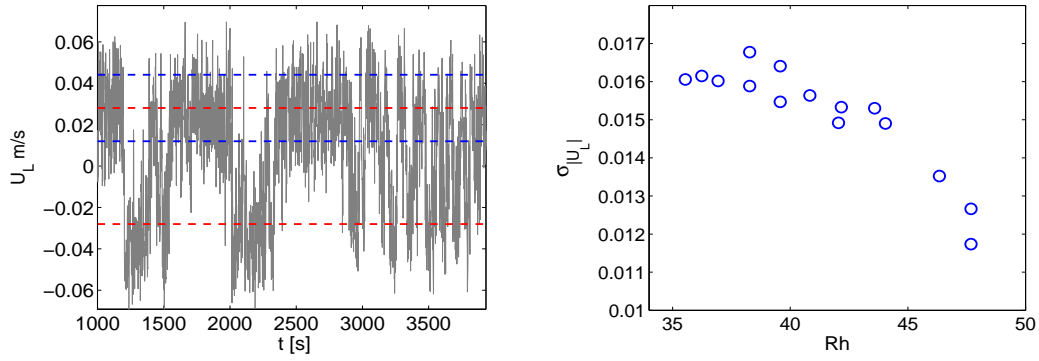


FIGURE 6.9 – Gauche : évolution temporelle de  $U_L$  pour  $Rh = 35.5$ , avec en rouge (respectivement en bleu), les droites d'ordonnées  $\pm \langle |U_L| \rangle$  ( resp.  $\langle |U_L| \rangle \pm \sigma_{|U_L|}$ ). Droite : déviation standard  $\sigma_{|U_L|}$  de  $|U_L|$  en fonction de  $Rh$ .

### 6.2.5 Bilan

Nous avons montré dans cette section que la fréquence des renversements décroît de manière exponentielle en fonction de  $Rh$ . Cette propriété est robuste aux changements des critères de détection des renversements. La décroissance exponentielle de cette fréquence indique qu'il n'existe pas de seuil  $Rh_c$ , tel que pour  $Rh > Rh_c$ , l'écoulement ne se renverse plus.

Nous avons constaté que la distribution  $P(\tau_{renv})$  des durées  $\tau_{renv}$  entre deux renversements est aussi exponentielle. De plus, les fluctuations de  $U_L$  semblent n'être pas corrélées à la variation de la fréquence des renversements sur la gamme  $Rh \in [35, 42]$ .

## 6.3 Comparaison des renversements pour deux $Rh$ différents

Nous souhaitons comparer la dynamique des renversements à faible et haut  $Rh$  à partir des mesures des sondes Vives, pour identifier l'origine de la décroissance de la fréquence des renversements. Nous avons donc sélectionné deux mesures, une à  $Rh = 38$  et l'autre  $Rh = 48$ .

### Les séries temporelles

Les séries temporelles de  $\bar{U}_L$  à  $Rh = 38$  (à gauche) et  $Rh = 48$  (à droite) sont représentées sur la figure 6.10.

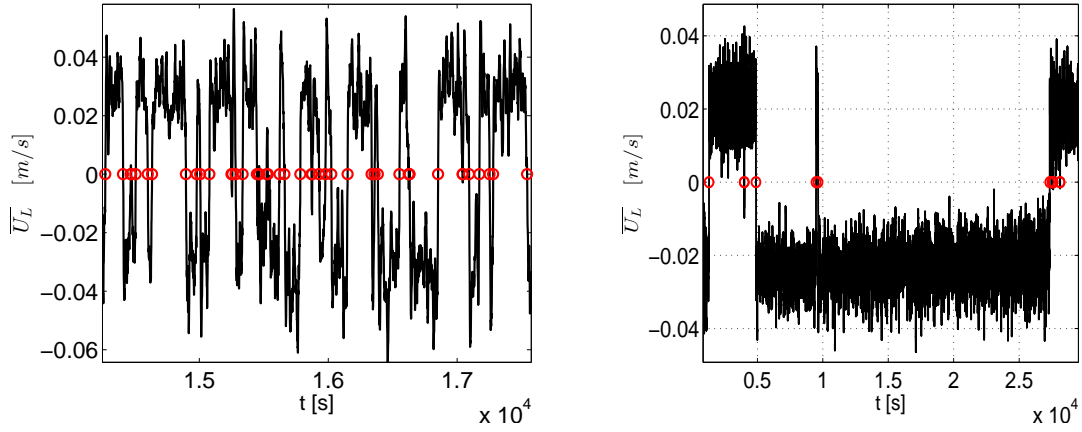


FIGURE 6.10 – Série temporelle de  $\bar{U}_L$  avec à gauche  $Rh = 38$  et à droite  $Rh = 48$ .

Sur la mesure à  $Rh = 38$ , nous avons identifié 175 renversements sur une durée de 7 heures et sur la mesure avec  $Rh = 48$ , 15 renversements sur une durée de 9 heures.

### Comparaison des renversements de $U_L$

Nous avons superposé tous les renversements de chaque série temporelle sur la figure 6.11 avec  $Rh = 38$  à gauche et  $Rh = 48$  à droite. Le temps de référence  $t = 0$  correspond au moment où  $U_L$  change de signe. Nous n'avons pris que les renversements et exclu les excursions. Pour superposer toutes les réalisations, la vitesse  $U_L$  est multipliée par le signe de la moyenne de  $U_L$  sur toute la durée précédant le renversement. La courbe noire représente la moyenne des réalisations.

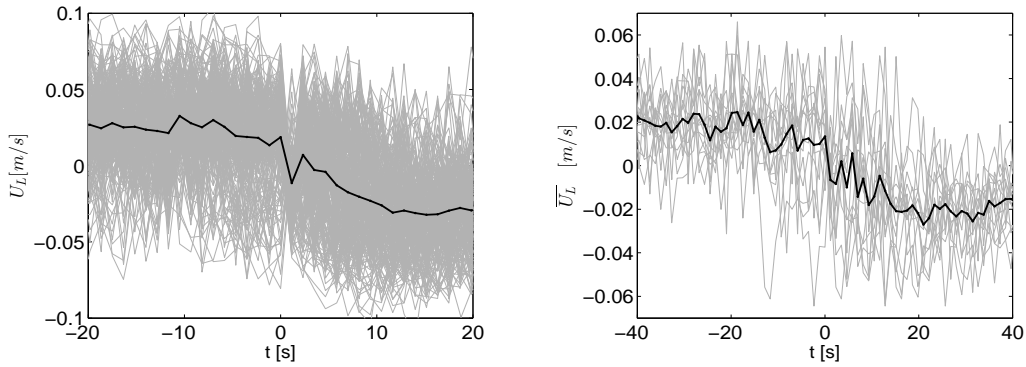


FIGURE 6.11 – Superposition des renversements avec comme instant de référence  $t = 0s$ , correspond au moment où  $U_L$  change de signe. Gauche : renversements avec  $Rh = 38$  Droite : renversements avec  $Rh = 48$ .

On constate que les courbes sont très dispersées à la fois pour  $Rh = 38$  et  $Rh = 48$ . Il ne semble pas exister de concentration des trajectoires autour de la moyenne. On remarque aussi que la moyenne des renversements semble être impaire par rapport à

$t = 0$ . Il n'existe pas de phase lente initiale et de phases rapide après le renversement, comme dans certaines observations de renversements [50].

Pour la mesure à  $Rh = 38$ , il est possible de calculer la distribution des amplitudes  $P(U_L, t)$  de  $U_L$  en fonction du temps grâce au grand nombre de renversements. Cette distribution est tracée sur la figure 6.12. Le temps est en abscisse, l'amplitude de  $U_L$  est en ordonnée et le code couleur correspond à la probabilité  $P(U_L, t)$ . Nous avons tracé le logarithme de  $P(U_L, t)$  normalisée par sa valeur maximale. On remarque que la distribution est aussi très étalée autour de sa valeur moyenne.

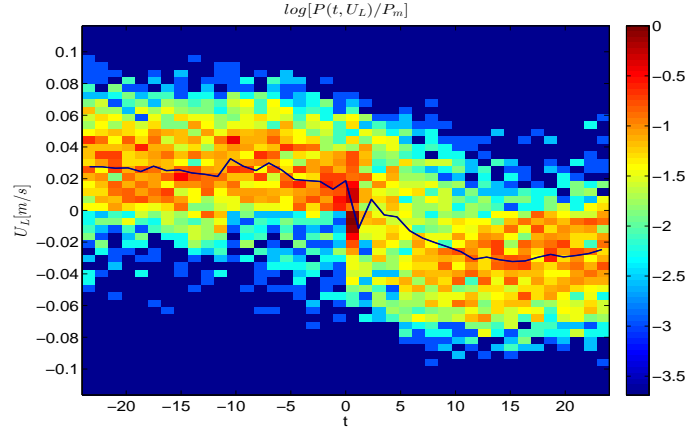


FIGURE 6.12 – Distribution  $P(U_L, t)$  des amplitudes de  $U_L$  pendant un renversement en fonction du temps pour  $Rh = 38$ .

Nous avons aussi représenté la superposition des renversements avec la vitesse moyennée  $\bar{U}_L$ , pour  $\tau_m = 10s$ . Nous n'avons représenté que 25 renversements pour  $Rh = 38$ , afin de pouvoir comparer avec les renversements à  $Rh = 48$ . Alors que les renversements pour  $Rh = 38$  semblent toujours être dispersés, on remarque que pour  $Rh = 48$ , ils sont concentrés autour de la valeur moyenne.

De plus, la moyenne des renversements semble effectuer un léger rebond après le renversement. Cet effet est aussi visible sur la distribution des amplitudes  $P(\bar{U}_L, t)$  représentée sur la figure 6.12.

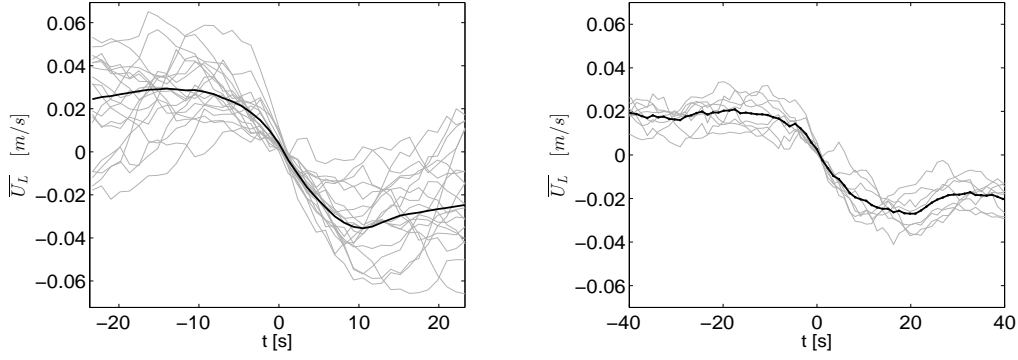


FIGURE 6.13 – Superposition des renversements avec comme instant de référence  $t = 0s$ , correspondant au moment où  $\bar{U}_L$  change de signe. Gauche : renversements avec  $Rh = 38$ . Droite : renversements avec  $Rh = 48$ .

### Espace des phase

Pour calculer les trajectoires dans l'espace des phase, nous utilisons la grandeur  $U_S$  qui est la vitesse moyenne entre le centre et la moitié de la distance entre le centre et le bord de la cellule, comme l'illustre le schéma de la figure 6.14. Cette mesure comporte les contributions des modes de Fourier tel que les modes  $(n_x, n_y) = (3, 3)$  et  $(2, 1)$ .

Les projections de la dynamique sur l'espace  $(\bar{U}_L, \bar{U}_S)$  sont tracées sur la figure 6.15, avec en haut à gauche,  $Rh = 38$ , et en bas à gauche,  $Rh = 48$ . Nous avons aussi représenté la densité de probabilité  $P(\bar{U}_L, \bar{U}_S)$  (figure de droite), telle que

$$P(\bar{U}_L, \bar{U}_S)d\bar{U}_Ld\bar{U}_S \quad (6.4)$$

est la probabilité que la trajectoire dans l'espace des phases passe dans le rectangle centré en  $(\bar{U}_L, \bar{U}_S)$ , de côtés  $d\bar{U}_L$  et  $d\bar{U}_S$ .

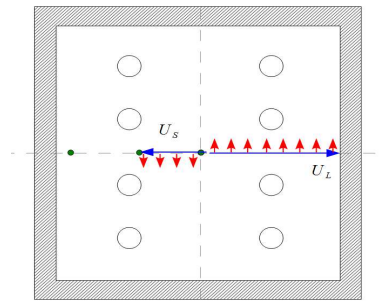


FIGURE 6.14 – Schéma indiquant les composantes de vitesses  $U_L$  et  $U_S$  utilisées pour représenter l'espace des phases.

Pour  $Rh = 38$ , on constate que les renversements connectant les deux attracteurs ne suivent pas des trajectoires régulières dans l'espace des phases. Ces trajectoires très fluctuantes semblent connecter les deux attracteurs, en passant près du point  $(0, 0)$ . Cette observation est confirmée par la densité  $P(\bar{U}_L, \bar{U}_S)$ , où la probabilité de passer

proche du point  $(0, 0)$  est relativement grande par rapport aux autres régions en dehors des deux attracteurs.

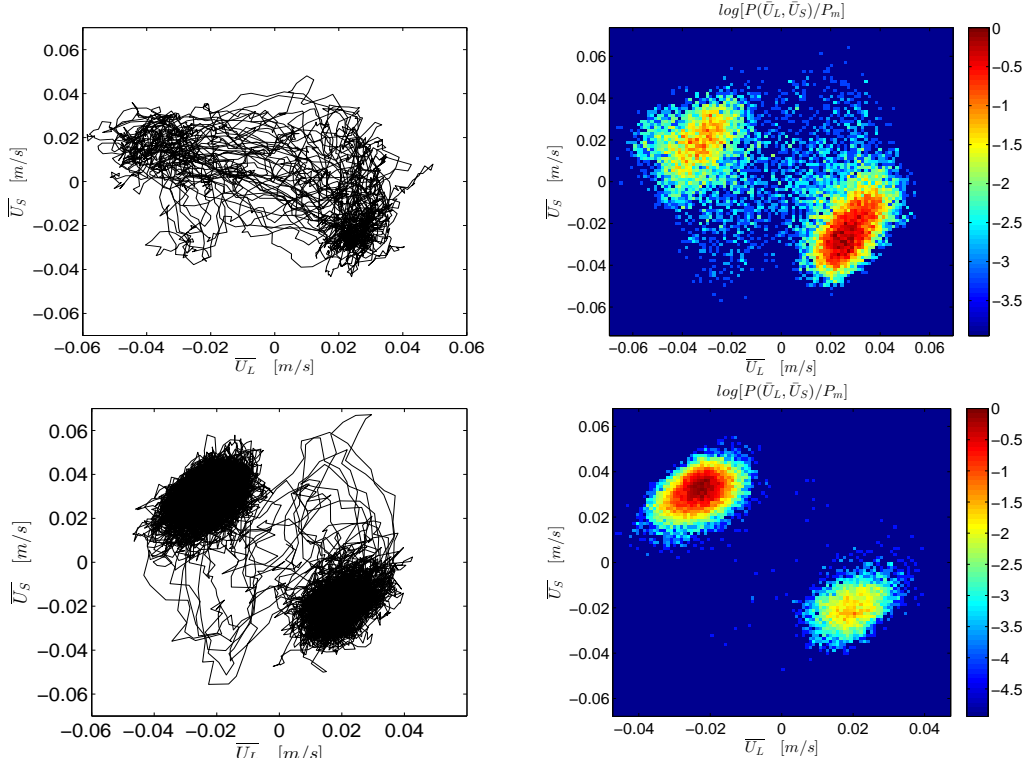


FIGURE 6.15 – Gauche : trajectoires dans l'espace des phases  $(\bar{U}_L, \bar{U}_S)$ . Droite :  $P(\bar{U}_L, \bar{U}_S)$  densité de probabilité associée aux trajectoires dans l'espace des phases. En haut : série temporelle avec  $Rh = 38$ . En bas : série temporelle avec  $Rh = 48$ .

Sur la figure 6.16 de gauche, nous avons tracé en rouge tous les renversements correspondant aux trajectoires partant de l'attracteur  $U_L > 0$  vers l'attracteur  $U_L < 0$  et en bleu les autres renversements. On constate qu'il n'existe pas de concentration des réalisations autour d'une trajectoire particulière. Cependant on remarque que les courbes rouges passent préférentiellement par le quadrant correspondant à l'espace  $U_L < 0$  et  $U_S < 0$  et que les courbes bleues transitent par celui correspondant à  $U_L > 0$  et  $U_S > 0$ .

Pour  $Rh = 48$ , la dynamique semble être plus simple. En effet, on observe peu de renversements passant dans le voisinage de l'origine. Cette observation est aussi confirmée sur la figure 6.16, où les trajectoires partant de l'attracteur  $U_L > 0$  vers l'attracteur  $U_L < 0$  (en rouge) sont clairement différentes et antisymétriques par rapport aux renversements allant de  $U_L < 0$  vers  $U_L > 0$ .

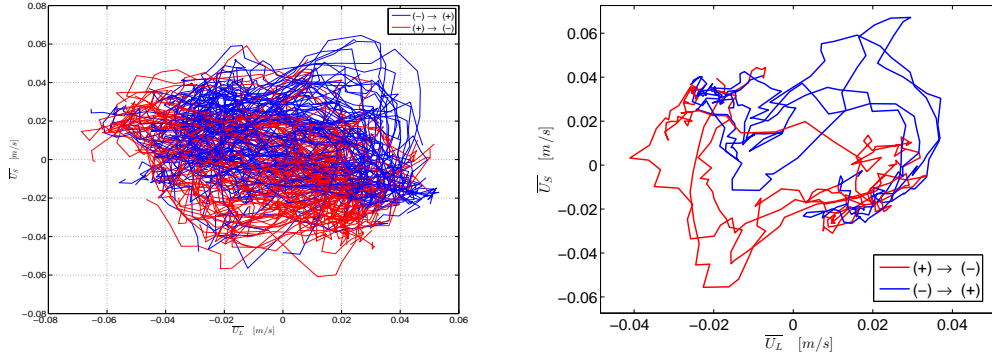


FIGURE 6.16 – Trajectoires comprenant uniquement les renversements dans l'espace des phases  $(\bar{U}_L, \bar{U}_S)$ . Les courbes rouges correspondent aux renversements de l'attracteur  $U_L > 0$  vers l'attracteur  $U_L < 0$  et en bleu, les autres renversements. Gauche : trajectoires pour  $Rh = 38$ . Droite : trajectoires pour  $Rh = 48$ .

### Sélection des trajectoires évitant l'origine

Il est possible d'extraire les trajectoires antisymétriques de la série temporelle avec  $Rh = 38$ , en excluant tous les renversements passant dans le voisinage de l'origine. Nous sélectionnons toutes les trajectoires ne passant pas dans le disque de rayon  $\delta r$  centrée en  $(0, 0)$ . Ces trajectoires sont représentées sur la figure 6.17 de gauche, avec  $\delta r = 10^{-2} m/s$ . Sur la figure de droite, nous avons tracé les trajectoires passant dans le disque.

On constate qu'une grande partie des renversements ne passant pas dans le voisinage du centre, ont des trajectoires proches de celles décrites sur la figure 6.16 de droite à  $Rh = 48$ . Cependant, ce critère n'exclue pas complètement les trajectoires chaotiques dans l'espace des phases et réciproquement, on constate sur la figure 6.17 de droite, des trajectoires passant proche de l'origine mais décrivant aussi une trajectoire similaire aux renversements à  $Rh = 48$ .



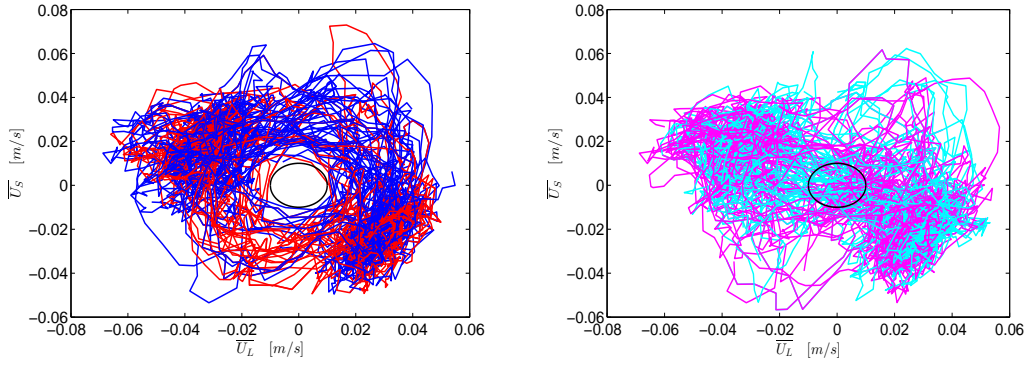


FIGURE 6.17 – Gauche : Renversements pour  $Rh = 38$  ne passant pas dans le disque de rayon  $\delta r = 10^{-2}$  centré à l'origine dans l'espace des phases. Droite : renversements passant par le disque. Les courbes rouges et magenta correspondent aux renversements de l'attracteur  $U_L > 0$  vers l'attracteur  $U_L < 0$  et en bleu et cyan, les autres renversements.

Dans le chapitre précédent, nous avons constaté que la norme de  $|U_L|$  saturait pour  $Rh > 35$ . La position des attracteurs dans l'espace des phases ne varie donc plus en fonction de  $Rh$ . Nous pouvons donc étendre l'étude des renversements évitant l'origine à toute la gamme de  $Rh$ . Nous avons donc quantifié la probabilité qu'un renversement passe proche de l'origine dans l'espace des phases  $(\bar{U}_L, \bar{U}_S)$  en fonction de  $Rh$ . Soit  $P_{0,0}(\delta r)$  la probabilité qu'un renversement passe dans le disque de rayon  $\delta r$  centré à l'origine  $(0, 0)$ , telle que

$$P_{0,0}(\delta r) = \frac{N(\delta r)}{N_r} \quad (6.5)$$

avec  $N(\delta r)$  le nombre de renversements passant dans le disque de rayon  $\delta r$ .  $N_r$  est le nombre total de renversement. La probabilité  $P_{0,0}(\delta r)$  est représentée sur la figure 6.18 en fonction de  $Rh$  avec  $\delta r = 10^{-2} m/s$ .

On constate que le pourcentage de trajectoires passant proche de l'origine décroît à mesure que  $Rh$  augmente, comme l'indique la courbe de tendance en rouge.

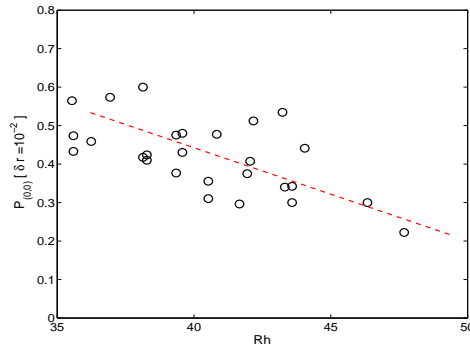


FIGURE 6.18 – Pourcentage de renversements  $P_{0,0}(\delta r = 10^{-2})$  passant proche de l'origine dans l'espace des phases  $(\bar{U}_L, \bar{U}_S)$  en fonction de  $Rh$ .

## Bilan

La comparaison de la dynamique des renversements à faible et haut  $Rh$  a montré que pour les  $Rh$  importants, la faible fréquence des renversements est associée à une dynamique plus simple des renversements. En effet, pour  $Rh = 48$ , les renversements dessinent des trajectoires bien définies dans l'espace des phases. De plus, les trajectoires partant de l'attracteur  $U_L > 0$  vers  $U_L < 0$  sont impaires par rapport à celle faisant le chemin opposé.

Lorsque  $Rh$  est faible, ces renversements semblent coexister avec des renversements dont la dynamique est plus chaotique avec des trajectoires passant proches de l'origine. Cependant à mesure que  $Rh$  augmente, la probabilité que le système passe au voisinage de l'origine décroît.

## 6.4 Dynamique des renversements

### 6.4.1 Introduction

Dans cette section, nous présentons l'analyse des instantanés du champ de vitesse obtenu grâce au suivi de particules lors d'un renversement. Nous décomposons le champ de vitesse sur les modes de Fourier  $\hat{u}$  et  $\hat{v}$ . A partir de ces deux composantes, on peut calculer la fonction de courant  $\psi_{n_x, n_y}$  telle que

$$\psi_{n_x, n_y} = \frac{1}{2} \frac{L}{\pi} \left( \frac{\hat{u}}{n_y} - \frac{\hat{v}}{n_x} \right) \quad (6.6)$$

avec  $L$  la largeur de la cellule. L'énergie  $E_{n_x, n_y}$  sur la composante  $(n_x, n_y)$  est définie par

$$E_{n_x, n_y} = |\omega_{n_x, n_y}| |\psi_{n_x, n_y}| = \pi^2 L^{-2} (n_x^2 + n_y^2) |\psi_{n_x, n_y}|^2 \quad (6.7)$$

Toutes les fonctions de courant sont normalisées par la moyenne de la valeur absolue de  $\psi_{1,1}$ . Nous avons aussi calculé le moment cinétique  $L$  total des particules et l'intégrale de la vorticité  $\Omega$  aux échelles supérieures à  $l$ , définis par

$$L(t) = \sum_{\mathbf{x}=(x_i, y_i)}^{N_p} \mathbf{x}(t) \times \mathbf{v}(t) \quad \text{et} \quad \Omega(t) = \iint \omega_l dS \quad (6.8)$$

. avec  $(x_i, y_i)$  la position de la particule et  $N_p$ , le nombre de particules. Le champ  $\omega_l$  est la vorticité calculée avec le champ de vitesse filtré pour  $l = 0.75cm$ . En théorie, la vorticité totale devrait être nulle <sup>2</sup>, mais  $\Omega(t)$  calculée ici correspond à la vorticité totale aux échelles supérieures à  $l$ .  $\Omega$  et  $L$  sont aussi normalisés par la moyenne de leur valeur absolue.

---

<sup>2</sup>Du fait de la condition d'adhérence à la paroi, la circulation totale doit être nulle

### 6.4.2 Dynamique d'un renversement à $Rh = 42$

#### Série temporelle de $\psi_{1,1}$ , de la vorticité et du moment cinétique

Nous allons analyser un renversement pour  $Rh = 42$ . Il correspond au renversement avec le  $Rh$  le plus élevé, capturé avec le suivi de particules.

La fonction de courant  $\psi_{1,1}$  de l'écoulement à grande échelle est représentée en fonction du temps sur la figure 6.19 de gauche et la phase du renversement, sur la figure de droite. On situe le début du renversement entre  $t = 75$  et  $80$  secondes. La fonction de courant  $\psi_{1,1}$  va ensuite fluctuer autour de zéro entre  $t = 80s$  et  $90s$ . Le renversement se termine à  $t = 90s$ .

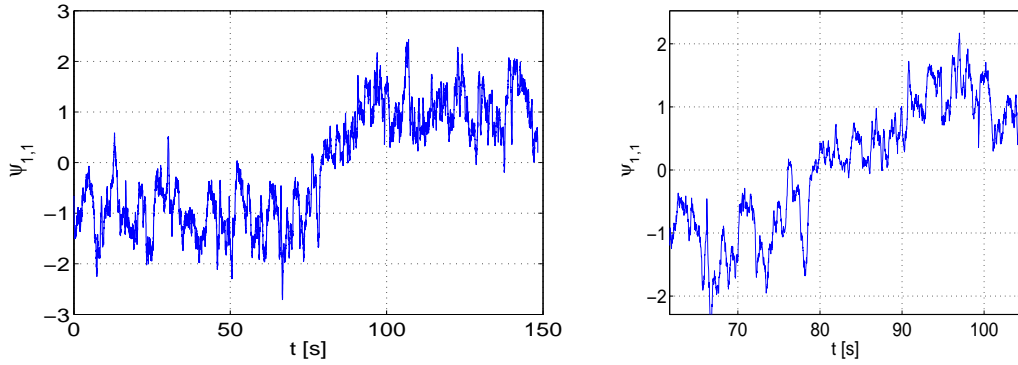


FIGURE 6.19 – Gauche : série temporelle de la fonction de courant  $\psi_{1,1}$  adimensionnée par la moyenne de sa valeur absolue. Droite : zoom sur la phase de renversement.

Sur la figure 6.20, la vorticité totale  $\Omega$  (en rouge, figure de gauche) ainsi que le moment cinétique  $L$  (en rouge, figure de droite) semblent suivre globalement l'amplitude du mode  $\psi_{1,1}$ , et ne présentent pas de dynamique particulière. Il n'apparaît pas de signe précurseur sur ces deux grandeurs.

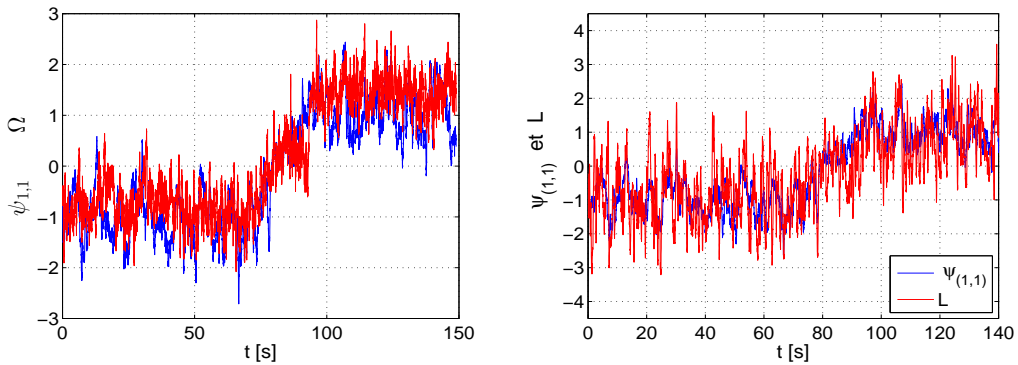


FIGURE 6.20 – Gauche : série temporelle de la fonction de courant  $\psi_{1,1}$  (en bleu) et la vorticité totale (en rouge), normalisées par la moyenne de leur valeur absolue. Droite : série temporelle de la fonction de courant  $\psi_{1,1}$  (en bleu) et du moment cinétique total (en rouge), normalisés par la moyenne de leur valeur absolue.

### Renversement entre les états condensés

Les moyennes temporelles du champ de vorticité filtré avant (figure de gauche) et après (figure de droite) le renversement sont représentées sur la figure 6.21. On constate que les champs moyens de vorticité après et avant le renversement sont similaires au champ de vorticité de l'état condensé présenté dans le chapitre précédent. On peut supposer que le renversement correspond à une transition de l'attracteur de l'état condensé avec un sens de rotation horaire vers l'attracteur symétrique.

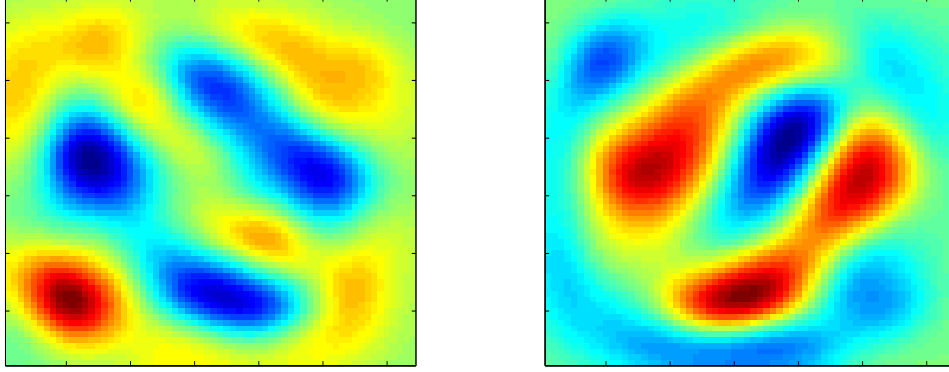


FIGURE 6.21 – La moyenne du champ de vorticité filtré avant (gauche) et après (droite) le renversement.

Cette observation est confortée par la projection de la dynamique sur l'espace des phases correspondant aux composantes  $(\psi_{1,1}, \psi_{3,3})$  tracées sur la figure 6.22. On rappelle que le mode  $(3, 3)$  domine l'énergie et l'enstrophie dans l'état condensé. On observe bien les deux attracteurs symétriques et la trajectoire correspondant au renversement est tracée en rouge. On constate que le renversement passe du temps proche de l'origine du repère et ne connecte pas directement les deux attracteurs symétriques.

Pour faire le lien avec l'espace des phases obtenu avec les sondes Vives, le mode  $(1, 1)$  a une forte composante sur la vitesse  $U_L$  et le mode  $(3, 3)$  sur la vitesse  $U_S$ . Le renversement observé correspond donc aux renversements passant à proximité de l'origine.

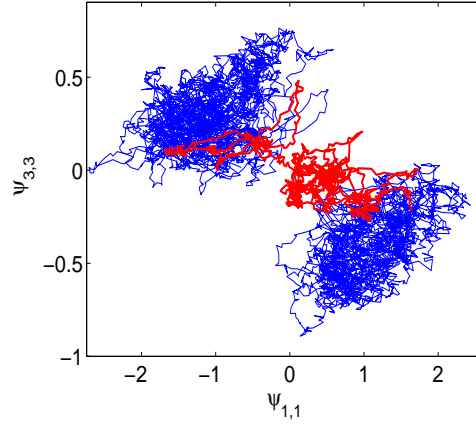


FIGURE 6.22 – Trajectoires dans l’espace des phases  $(\psi_{1,1}, \psi_{3,3})$ . La courbe en rouge correspond au renversement entre  $t = 70s$  et  $t = 90s$ .

### Dynamique des modes de Fourier

Nous avons aussi analysé la dynamique de l’énergie sur les autres modes  $(n_x, n_y)$  en fonction du temps. En plus des modes  $(1, 1)$  (en bleu) et  $(3, 3)$  (en magenta) qui sont présents avant et après le renversement, nous avons identifié deux modes particulièrement actifs pendant le renversement : le mode  $(3, 1)$  (en noir) et  $(2, 1)$  (en rouge).

On remarque que juste avant le renversement, les modes  $(1, 1)$  et  $(3, 1)$  présentent un pic d’énergie, puis l’énergie du mode  $(1, 1)$  décroît subitement ce qui correspond au renversement. La fonction de courant de l’écoulement lors du pic de ces deux modes est représentée sur la figure 6.24 de gauche. On constate que la phase associée aux fluctuations de  $(1, 1)$  et  $(3, 3)$  autour de zéro (cf figure 6.22) correspond à une augmentation de l’énergie dans le mode  $(2, 1)$  entre  $t = 80s$  et  $90s$ . Durant cette phase, l’écoulement est principalement composé de deux cellules (figure 6.20 de gauche).

On peut donc supposer que la fluctuation associée au pic du mode  $(3, 1)$  (figure 6.24 de gauche) a déstabilisé l’écoulement grande échelle, puis la dynamique est passée par une configuration comportant deux cellules (figure 6.24 de droite). Après cette phase transitoire, le système a finalement rejoint le bassin d’attraction de l’état condensé correspondant à l’autre sens de rotation.

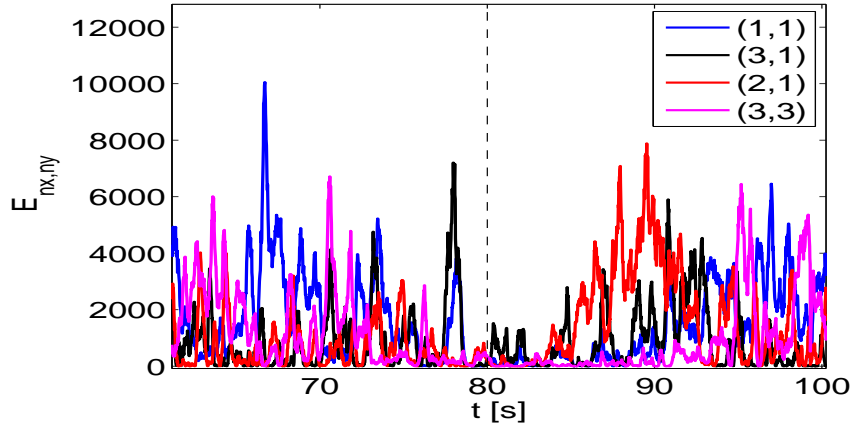


FIGURE 6.23 – Évolution de l'énergie sur les modes  $(1, 1)$  (bleu),  $(3, 1)$  (noir),  $(2, 1)$  (rouge) et  $(3, 3)$  (magenta) en fonction du temps. Le moment où l'écoulement à grande échelle se renverse est indiqué par les tirets noirs à  $t = 80s$ .

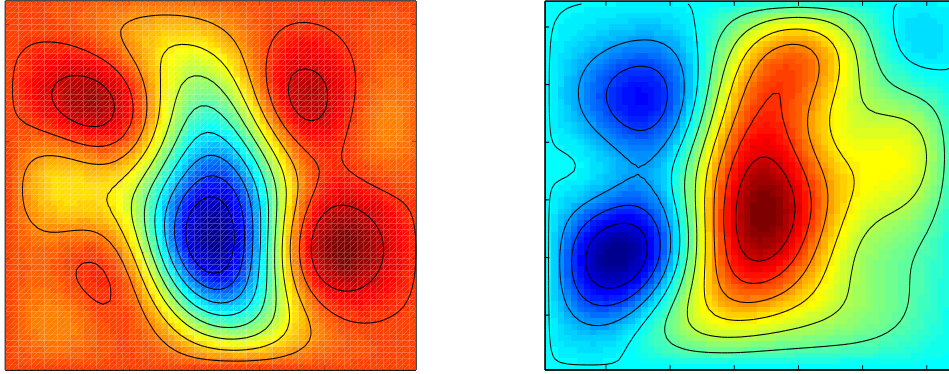


FIGURE 6.24 – Champ de la fonction de courant  $\psi(x, y)$  reconstruite à partir de la projection sur les modes de Fourier. A gauche :  $\psi(x, y)$  lors du pic du mode  $(3, 1)$ . Droite :  $\psi(x, y)$  à  $t = 90s$ .

### 6.4.3 Comparaison avec un autre renversement

Nous avons aussi constaté sur d'autres renversements une hausse de l'activité des deux modes  $(3, 1)$  et  $(2, 1)$ , mais leur apparition ne suit pas la même séquence que le renversement à  $Rh = 42$ . Sur la figure 6.25, nous avons représenté l'évolution de  $\psi_{1,1}$  pour  $Rh = 32$  sur la figure de gauche et l'énergie des composantes de Fourier sur la figure de droite. On remarque bien l'augmentation de l'énergie sur le mode  $(2, 1)$  juste avant le renversement et de fortes fluctuations des modes  $(3, 1)$  et  $(2, 1)$  durant le renversement. Mais les détails de l'évolution sont clairement différents de ceux de la figure 6.23.

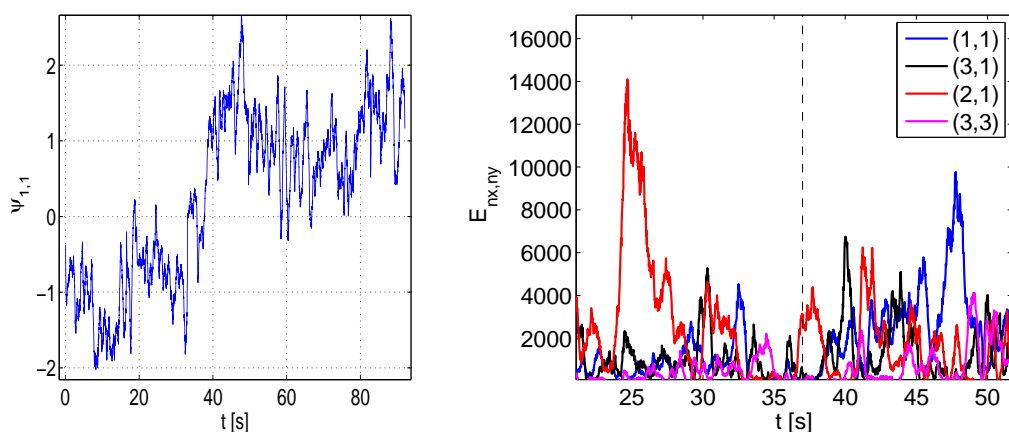


FIGURE 6.25 – Droite : série temporelle de la fonction de courant  $\psi_{1,1}$  adimensionnée par la moyenne de sa valeur absolue pour  $Rh = 32$ . Évolution de l'énergie sur les modes (1, 1) (bleu), (3, 1) (noir), (2, 1) (rouge) et (3, 3) (magenta) en fonction du temps pour  $Rh = 32$ .

De plus, pendant ce renversement, on observe des phases où la structure de l'écoulement se projette sur plusieurs modes de Fourier. Par exemple, le renversement illustré sur la figure 6.25 passe par une phase chaotique à  $t = 39s$ . Les champs de la fonction de courant  $\psi(x, y)$  et de la vorticité filtrée à  $t = 49s$  sont représentés sur la figure 6.26. On constate bien la présence de sept tourbillons, qui ont une projection sur plusieurs modes de Fourier.

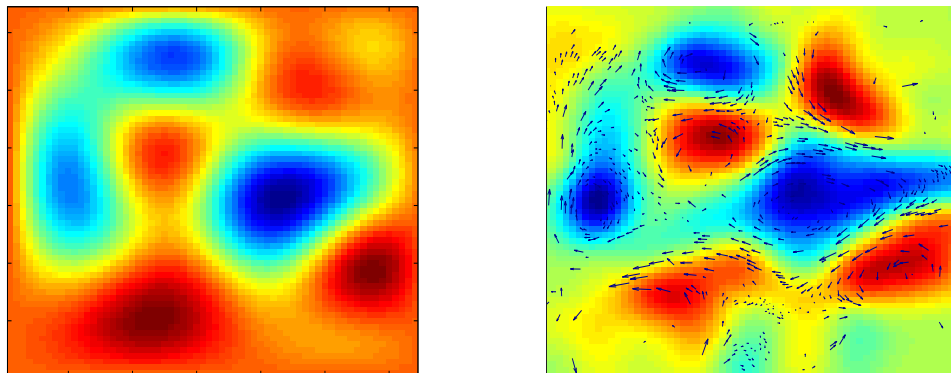


FIGURE 6.26 – Champ de la fonction de courant  $\psi(x, y)$  à gauche et champ de vorticité filtrée à droite, lors du renversement pour  $Rh = 32$  à  $t = 39s$ .

#### 6.4.4 Bilan

L'analyse des instantanés de vitesse obtenus par le suivi de particules montre que les renversements relient bien les deux attracteurs symétriques de l'état condensé.

Nous avons constaté que les renversements ne connectaient pas toujours directement les deux attracteurs mais pouvaient passer par une phase, où l'écoulement n'a pas de projection sur les modes  $(3, 3)$  et  $(1, 1)$ . Ces phases sont caractérisées par l'apparition des modes  $(2, 1)$  et  $(3, 1)$ , qui peuvent être entrecoupées d'épisodes plus turbulent. Ces renversements correspondent aux trajectoires passant à proximité de l'origine identifiées dans la section précédente.

Nous n'avons pas constaté de scénario bien défini de renversements du fait de la variabilité des séquences d'apparition des modes  $(2, 1)$  et  $(3, 1)$  sur la dizaine de mesures effectuées. Cependant, ces mesures sont réalisées pour des nombres de  $Rh$  inférieurs à 42. Ces renversements sont donc à priori plus complexes que les renversements aux  $Rh$  proches de 50.

## 6.5 Discussion sur le mécanisme des renversements

### 6.5.1 Études antérieures

#### La première observation expérimentale

Les renversements d'une circulation grande échelle pour  $Rh$  grand furent initialement observés expérimentalement par Sommeria [56]. Le montage expérimental est identique au nôtre, avec un réseau de 36 électrodes et un champ magnétique uniforme appliqué une couche de mercure. L'écoulement laminaire correspond à un réseau de  $6 \times 6$  tourbillons contra-rotatifs.

Le seuil d'apparition des renversements est situé à  $Rh = 37$  et la circulation grande échelle ne se renverse plus pour  $Rh > 41$ . Lors d'un renversement, les modes  $n_x = 2$  présentent un accroissement d'activité, mais aucun scénario précis fut identifié.

#### Comparaison avec les autres montages

Depuis, aucune autre étude expérimentale n'a relaté l'observation de ce phénomène. Les études similaires [59] ont utilisé une configuration expérimentale différente, avec un réseau d'aimants et un courant injecté uniforme dans un électrolyte. Dans ces expériences, la bidimensionnalité n'est plus assurée par les processus MHD présentés dans le chapitre 1. De plus, l'injection de vorticité est moins localisée et les nombres de Reynolds sont beaucoup plus faibles.

Ainsi, malgré la confirmation expérimentale de la présence d'un état condensé [49, 66], l'écoulement à grande échelle associé n'a jamais présenté de reversement de sens de rotation dans ces expériences.

#### Renversement dans le cas $Rh^{-1} = 0$

Molenaar *et al.* [46] ont étudié numériquement la stabilité d'un écoulement grande échelle dans la limite  $Rh^{-1} = 0$  avec condition d'adhérence aux parois. Ces auteurs ont constaté qu'avec un forçage stationnaire et périodique spatialement, la circulation grande échelle était stable et ne se renversait pas. Ils ont donc étudié l'effet d'un forçage stochastique sur la circulation grande échelle.



Ils ont observé un écoulement grande échelle dominé par un vortex central (cf figure 6.27), ce qui semble être une propriété générique des écoulements dont le forçage est stochastique [12, 33, 55]. Cet écoulement à grande échelle peut se déstabiliser et changer spontanément de sens de rotation. Cette déstabilisation semble être due à une instabilité se développant dans la couche limite proche des parois. Cette instabilité provoque un épisode turbulent dans le centre de la cellule, suivi de la formation d'un nouveau vortex central dont le sens de rotation peut être soit identique soit opposé à la circulation précédant l'instabilité. Sur la figure 6.27, on représente les champs de vorticité avant (droite), pendant (milieu) et après (gauche) un renversement.

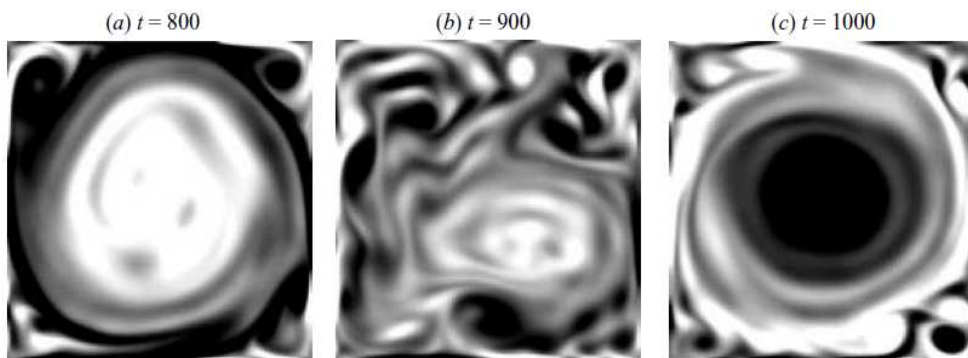


FIGURE 6.27 – Champs de vorticité extrait de Molenaar *et al.* [46] lors d'un renversement de la circulation grande échelle.

Plusieurs éléments permettent d'écarter ce mécanisme pour notre expérience. Tout d'abord, notre étude se place dans la limite  $1 < Rh \ll Re$ , alors que leur travaux numériques sont dans le régime  $1 < Re \ll Rh$ . Ainsi dans notre expérience, les couches limites proches des parois ne sont pas la source principale de dissipation, contrairement au cas où  $Rh^{-1} = 0$  avec un forçage stochastique.

De plus, la dynamique tourbillonnaire semble être complètement différente. L'état condensé observé dans notre expérience comporte plusieurs vortex. Le mécanisme de renversement ne se semble pas se résumer à la déstabilisation d'un seul vortex.

## 6.5.2 Une dynamique de basse dimension

### Dynamique de basse dimension dans les simulations

Gallet [24] a étudié numériquement dans sa thèse la même configuration que notre expérience avec un forçage comportant  $2 \times 4$  tourbillons. Les propriétés des renversements suivent les prédictions d'un scénario d'intermittence de crise [9]. L'auteur observe lors des renversements du mode  $(1, 1)$ , que les modes  $(2, 1)$  et  $(1, 2)$  sont particulièrement actifs. Il montre alors que ce scénario d'intermittence de crise peut être capturé [22] par un modèle de basse dimension comprenant ces trois modes<sup>3</sup>. Nous allons donc comparer les propriétés de ce scénario avec nos résultats expérimentaux.

<sup>3</sup>Ce modèle repose sur des arguments de symétrie.

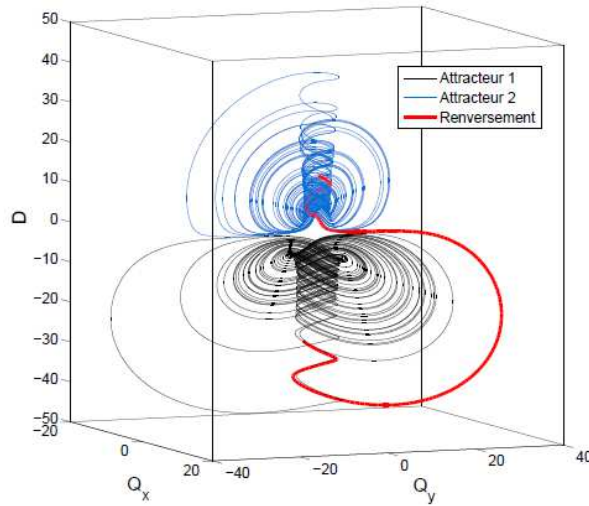


FIGURE 6.28 – Espace des phases du modèle à trois modes décrit dans [22]. Les deux états symétriques sont connectés par une trajectoire en rouge, autour de laquelle se concentrent les renversements.

### L'intermittence de crise

Dans ce scénario, il existe un seuil  $Rh_c$  au dessus duquel les deux attracteurs sont complètement séparés et distincts dans l'espace des phases. Au seuil  $Rh_c$ , chaque attracteur chaotique collisionne le bassin d'attraction de l'autre attracteur. Cette collision crée une connection entre les deux attracteurs. Les renversements proches du seuil  $Rh_c$  passent donc au voisinage de cette région. Sur la figure 6.28, on constate la présence des deux attracteurs <sup>4</sup> symétriques, connectés par la trajectoire.

Dans notre expérience, la décroissance exponentielle de la fréquence des renversements n'indique pas la présence d'un seuil. De plus, le scénario d'intermittence de crise est souvent associé à une décroissance en loi de puissance de la fréquence des renversements, telle que  $F_r \sim (Rh - Rh_c)^\gamma$ .

Il est cependant possible que ce seuil ne soit pas accessible dans l'expérience car se situant à des valeurs de  $Rh$  trop élevées. En effet, le nombre  $Rh$  varie en racine carré du courant et nous ne pouvons pas dépasser 200A sans détériorer les résistances de puissance ainsi que les électrodes. De plus, pour vérifier l'absence de seuil, il faudrait effectuer des mesures longues d'au moins 24 heures. Or le montage ne permet pas la stabilité des conditions expérimentales sur plus de 12h, à cause des variations thermiques. La cellule placée au centre de la bobine est difficile à contrôler thermiquement.

Ce scénario prédit aussi une distribution exponentielle des durées entre deux renversements, comme c'est le cas dans notre expérience. Cependant, cette propriété est commune à de nombreux scénarii de renversements, dès lors qu'ils impliquent une absence d'effet mémoire.

Une autre propriété de ce scénario est la concentration des trajectoires lors des renversements au voisinage du point de collision, lorsqu'on est proche du seuil  $Rh_c$ . Cette propriété serait plutôt en accord avec notre observation de la simplification des

<sup>4</sup>en toute rigueur, il n'existe plus deux mais qu'un seul attracteur

trajectoires des renversements lorsqu'on augmente  $Rh$ .

Un autre argument en la faveur d'une dynamique de basse dimension est la faible corrélation entre les fluctuations de  $U_L$  et la fréquence des renversements. Cette propriété semble exclure un mécanisme basé sur des fluctuations aléatoires de fortes amplitudes déclenchant les renversements.

### Dynamique à haut Reynolds

L'étude numérique de Gallet [24] est effectuée à un nombre de Reynolds égale à  $Re = 2.10^3$ . Ce nombre est relativement faible comparé à ceux de l'expérience de l'ordre de  $10^5$ . Or nous avons montré dans une précédente étude numérique [45] que la structure de l'attracteur dans l'espace des phases à  $Rh$  grand, pouvait fortement changer en fonction de  $Re$ .

Nous avons étudié la dynamique des renversements pour un forçage sur le mode  $(n_x, n_y) = (6, 6)$ . Pour  $Re = 2.10^3$  et  $Rh = 55$ , nous avons observé la bistabilité entre l'état turbulent et l'état condensé. Sur la figure 6.29, on a représenté la projection de la dynamique sur l'espace des phases, avec la composante  $(n_x, n_y) = (1, 1)$  en abscisse et  $(6, 6)$  en ordonnée.

Les deux états sont clairement visibles sur la trajectoire en rouge dans l'espace des phases. L'état condensé correspond à la région dense associée à une grande amplitude du mode  $(1, 1)$  et l'état turbulent est situé dans la zone centrale avec de plus fortes amplitudes du mode  $(6, 6)$ . Les trajectoires des renversements connectent uniquement les deux états turbulents symétriques. Lorsque  $Rh$  est égale à 100, le système reste dans l'état condensé (en vert) et ne se renverse plus.

Lorsque le Reynolds est multiplié par 5 (figure du bas, courbe bleue), les deux attracteurs ne sont plus discernables pour  $Re = 10^4$  et  $Rh = 55$ . Pour  $Rh = 100$ , l'état condensé (en vert) occupe une partie de l'attracteur turbulent. L'augmentation du nombre de Reynolds a donc complètement changé la structure de l'attracteur de l'état condensé.

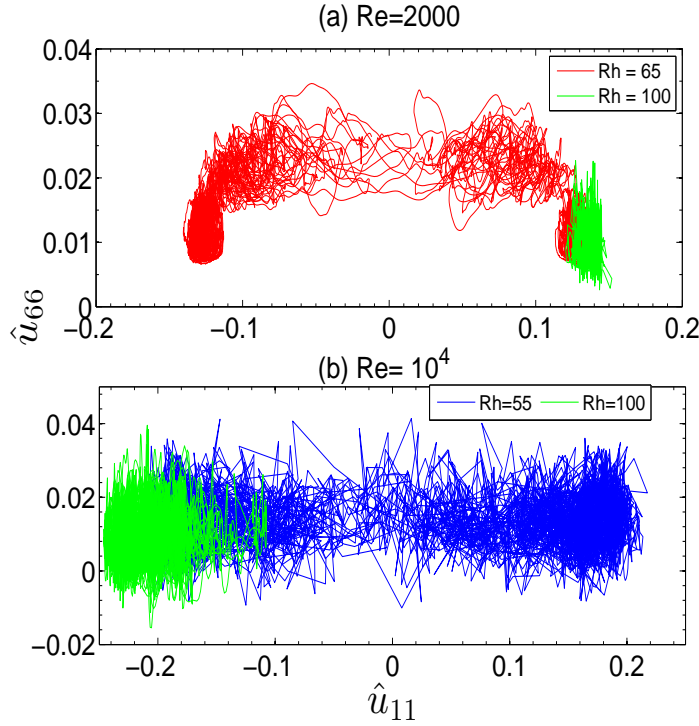


FIGURE 6.29 – Trajectoires dans l’espace des phases avec la composante  $(n_x, n_y) = (1, 1)$  en abscisse et  $(6, 6)$  en ordonnée. La figure du haut correspond à des simulations avec  $Re = 10^3$ , celle du bas à  $Re = 10^4$ .

Il serait donc intéressant de tester la robustesse du scénario d’intermittence de crise pour des nombres de Reynolds plus élevés.

## 6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les propriétés statistiques et dynamiques des renversements. Nous avons montré que la fréquence des renversements décroît de manière exponentielle en fonction de  $Rh$ .

Nous avons constaté que la distribution  $P(\tau_{renv})$  des durées  $\tau_{renv}$  entre deux renversements est aussi exponentielle. Les fluctuations de  $U_L$  ne semblent pas être corrélées à la variation de la fréquence des renversements.

L’analyse des instantanés de vitesse obtenus par le suivi de particule ont montré que les renversements relient bien les deux attracteurs symétriques de l’état condensé. La trajectoire des renversements peut être complexe en ne connectant pas toujours directement les deux attracteurs. Ces phases sont caractérisées par l’apparition des modes  $(2, 1)$  et  $(1, 3)$ .

Nous avons constaté que certaines propriétés statistiques des renversements sont en accord avec les prédictions du scénario d’intermittence de crise observée à faible Reynolds par [22]. Cependant, l’absence de seuil marquant la fin des renversements laisse supposer que la dynamique à haut Reynolds est plus complexe.



Deuxième partie

Expérience Von Karma Sodium



# Chapitre 7

## Étude des temps de décroissance du dipôle et du quadrupôle dans l'expérience VKS

### 7.1 Les campagnes VKS

Nous avons présenté dans l'introduction le cadre expérimental de l'expérience Von Karman Sodium. Cette expérience est basée sur la collaboration de trois laboratoires : le laboratoire de physique de l'ENS Lyon, le groupe SPHYNX du service de physique de l'Etat Condensé du CEA et le laboratoire de physique statistique de l'ENS Paris.

Durant cette thèse, nous avons effectué sept campagnes entre mai 2011 et décembre 2012, dont les caractéristiques sont détaillées sur le tableau 7.1. La campagne VKS2Z est la dernière campagne de cette collaboration.

Dans la colonne "turbine", nous avons indiqué respectivement les matériaux du disque et des pales de chacune des turbines. Dans la colonne modification, nous avons notifié la présence d'éléments supplémentaires changeant l'écoulement (les baffles, les pales droites), les conditions aux limites du champ magnétique (la chemise et les flasques) ou les deux (les camemberts en cuivre entre les pales).

Campagne	turbines 1	turbines 2	Modifications	dynamo
VKS2T	Inox-Fer	Inox-Fer	Flasques	non
VKS2U	Fer-Fer	Fer-Fer	baffles	oui
VKS2V	Fer-Fer	Fer-Fer	pales droites	oui
VKS2W	Fer-Cuivre	Cuivre-Fer	-	non
VKS2X	Inox-Inox	Inox-Inox	chemise en fer	non
VKS2Y	Fer-Fer	Inox (hélices)	-	oui
VKS2Z	Fer-Fer	Fer-Fer	camemberts en cuivre	non

TABLE 7.1 – Description des sept campagnes VKS entre mai 2011 et décembre 2012.

Le tableau 7.1 montre que la présence d'au moins une turbine comportant un disque en fer et des pales en fer est une condition nécessaire à l'effet dynamo dans l'expérience VKS, mais pas suffisante (cf VKS2Z).



## 7.2 Le modèle dipôle-quadrupôle

Le modèle dipôle-quadrupôle décrit dans Pétrélis *et al.* [50] a permis d'expliquer grâce à un même formalisme les régimes dynamiques [5], la bistabilité [4, 24] et la localisation [21] du champ magnétique dans l'expérience VKS. Nous allons présenter succinctement les bases de ce modèle.

Le mode instable observé en contra-rotation exacte est principalement composé d'un dipôle dont l'axe est aligné avec l'axe de rotation des disques. Nous notons  $d$  l'amplitude du mode instable. Lorsque les disques ne tournent plus en contra-rotation exacte, l'écoulement ainsi que le champ magnétique deviennent asymétriques par rapport à la rotation  $R_\pi$  indiquée sur la figure 7.1. L'asymétrie du champ magnétique s'explique au premier ordre par l'apparition d'une composante quadrupolaire d'amplitude  $q$ . Le quadrupôle apparaît ainsi naturellement lorsque la symétrie de l'écoulement est brisée. La structure des modes dipolaires et quadrupolaires est schématisée sur la figure 7.1.

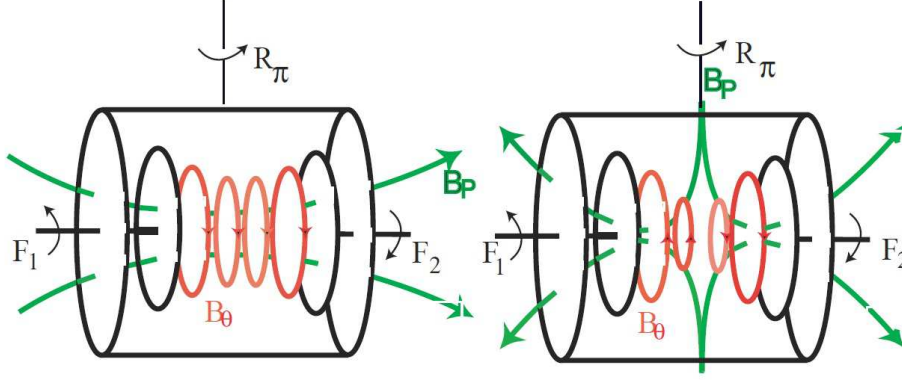


FIGURE 7.1 – Gauche : schéma du champ magnétique du mode dipolaire. Droite : schéma du champ magnétique du mode quadrupolaire.

Comme nous étudions des régimes proches du seuil de l'instabilité, nous supposons que la dynamique du champ magnétique est principalement dominée par celle du dipôle et du quadrupôle. Cette affirmation repose sur une hypothèse que nous essaierons de valider : le quadrupôle a un taux de croissance proche de zéro lorsque le dipôle devient instable. Grâce à cette hypothèse, nous pouvons utiliser la théorie des formes normales, et supposer que le dipôle et le quadrupôle sont les modes centraux du problème. Les amplitudes  $d$  et  $q$  sont alors décrites par une équation d'amplitude.

Dans la prochaine section, nous montrerons que le taux de croissance du quadrupôle décroît significativement et indique un seuil proche de celui du dipôle, dans une campagne où des régimes dynamiques sont présents. Cette observation justifie ainsi la prise en compte du quadrupôle comme mode central.

Afin d'extraire l'amplitude des deux modes, nous utilisons une méthode basée sur la projection du champ magnétique sur la géométrie des modes dipolaire et quadrupolaire. Cette technique permet d'extraire distinctement les taux de croissance des deux modes, contrairement à une méthode basée sur la décroissance de l'énergie.

### **7.3 Mesure des temps de décroissance du dipôle et du quadrupôle**

L'article est présenté sous la forme d'une lettre.

# Decay rates of magnetic modes below the threshold of a turbulent dynamo

J. Herault, F. Pétrélis, S. Fauve<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Laboratoire de Physique Statistique, Ecole Normale Supérieure, CNRS,  
Université P. et M. Curie, Université Paris Diderot, Paris, France*

We measure the decay rates of magnetic field modes in a turbulent flow of liquid sodium below the dynamo threshold. We observe that turbulent fluctuations induce energy transfers between modes with different symmetries (dipolar and quadrupolar one). Using symmetry properties, we show how to measure the decay rate of each mode without being restricted to the one with the smallest damping rate. We observe that the respective values of the decay rates of these modes depend on the shape of the propellers driving the flow. Dynamical regimes, including field reversals, are observed only when the modes are both nearly marginal. This is in line with a recently proposed model.

PACS numbers: 45.70.-n, 45.70.Mg

The generation of magnetic field by the flow of an electrically conducting fluid through the dynamo process has been primarily studied in order to understand planetary and stellar magnetic fields [1]. This phenomenon also provides a canonical example of an instability that occurs on a fully turbulent flow. Other large scale instabilities of turbulent flows have been reported since a long time such as the drag crisis of turbulent wakes for instance. Although these purely hydrodynamic instabilities are easier to achieve in laboratory experiments, it is much more difficult to disentangle the unstable modes from the base flow whereas the growing magnetic modes above the dynamo threshold can be of course easily discriminated from the base flow. Instabilities occurring on turbulent flows involve several fundamental open questions, such as the effect of fluctuations on the instability growth-rate, a problem that involves technical similarities with the one of wave propagation in random media. In the nonlinear regime, the possibly anomalous scaling of the moments of the magnetic field amplitude versus the distance to instability threshold, is another open question, reminiscent of anomalous exponents in phase transitions [2]. We present here an experimental study related to the former aspect. The threshold of a linear instability is reached when the largest growth rate (eigenvalue) of the eigenmodes of the evolution equation for the perturbations vanishes. Below this threshold, small perturbations decay exponentially with a decay rate inversely proportional to the corresponding eigenvalue. The value of the decay rate thus measures the distance to the threshold of linear instability of the corresponding eigenmode. Measurements of growth and decay rates are commonly performed to characterize instabilities occurring over a steady or time-periodic background state. Eigenmodes with different symmetries are not linearly coupled and depending on the symmetries of the initial conditions, their decay rate can be measured. The problem is more complex for an instability generated by a turbulent flow. Indeed, at all time, turbulent fluctuations of the velocity field can transfer energy from one mode to the other, thus contaminating decay rate measurements. We report in the following how this bias can be avoided and how to measure independently the decay rate of the two less damped modes with different symmetries. We then show how their difference in decay rates can

be related to the dynamics observed above instability threshold.

The experiment concerns the generation of a magnetic field by a von Karman flow of liquid sodium (VKS experiment) that has been already reported in detail elsewhere [3]. The flow is driven by two counter-rotating coaxial propellers in a cylinder containing roughly 160 liters of liquid sodium maintained at a temperature around 120° C for which the electrical conductivity  $\sigma$  is close to  $10^7 (\Omega m)^{-1}$  (see fig. 1). The propellers are soft iron disks fitted with curved (resp. straight) iron blades. When they counter-rotate with the same speed, the dynamo threshold is reached for  $F_1 = F_2 = 13$  Hz (resp. 19 Hz). This corresponds to a magnetic Reynolds number,  $R_m = 2\pi\mu_0\sigma R^2 F$  around 24 (resp. 35) where  $R = 154.5$  mm is the radius of the disks. The time-averaged magnetic field is roughly an axial dipole which amplitude displays a slightly imperfect bifurcation because of the remanent magnetization of the disks. When the disks counter-rotate at different frequencies, a mode of quadrupolar symmetry is also generated [4]. The dipole and the quadrupole have opposite symmetries with respect to a rotation of  $\pi$  around the  $z$ -axis in the mid-plane between the disks ( $\mathcal{R}_\pi$  as sketched in fig. 1). For a large enough frequency difference, dynamical regimes can be observed such as periodic or random reversals of the magnetic field [4, 5] that involve energy transfers between the dipole and the quadrupole [6].

From now on, we restrict to measurements performed for exact counter-rotation  $F_1 = F_2 = F$ . Below the onset of instability, we apply a magnetic field generated by two axial coils. Each coil carries an equal electric current flowing in the same (resp. opposite) direction, thus providing an Helmholtz (resp. anti-Helmholtz) configuration generating an axial field of dipolar (resp. quadrupolar) symmetry, *i.e.* odd (resp. even) under  $\mathcal{R}_\pi$ . The magnetic field is measured with two probes located close to the disks, 109 mm away from the midplane. Each probe measures the three components of the magnetic field at ten positions (the deepest probe is 103 mm away from the cylinder axis and the distance between probes is 28 mm).

We apply a time-periodic magnetic field with a square wave shape in order to measure the decay rate of the magnetic response below the dynamo threshold as performed in [7, 8].

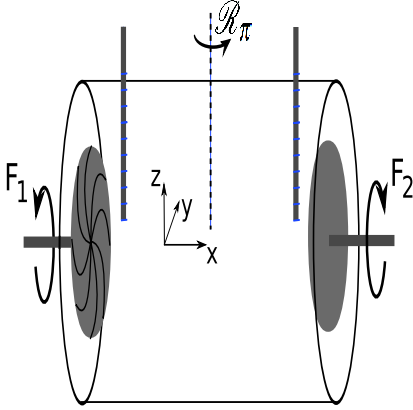


FIG. 1: Sketch of the experiment: two impellers counter-rotate at frequencies  $F_1$  and  $F_2$ . When  $F_1 = F_2$  the setup is invariant to  $\mathcal{R}_\pi$  rotation. The vertical thick lines indicate the locations of the two arrays of 3-axis Hall probes which measure the magnetic field close to each disk.

Experiments typically involve 20 periods of duration 10 s. When the external magnetic field is on, we observe a field induced by the flow of liquid sodium. When the external field is switched off, the induced magnetic field decays and reaches a small value that results from the ambient field. A first way to evaluate the amplitude of the excited magnetic mode is to calculate its energy density defined as the sum over the probes of the local energy density  $B_i^2$  averaged over the different realizations. This method is accurate when the field is dominated by a single mode. In fig. 2, the time series is displayed for an applied field in the anti-Helmoltz configuration such that one may expect to measure the decay rate of the quadrupolar mode. The decay of the magnetic energy is not exponential (black curve) and as will be made clear below, the time recording actually transitions between two different exponential behaviors. In this case, the decay rate is not correctly measured from the evolution of the magnetic energy. The method that we present now solves this problem.

We note  $\mathbf{B}_1(t)$  (resp.  $\mathbf{B}_2(t)$ ) the vectors containing the values associated to the probe close to disk 1 (resp. 2). In order to extract the decay of the amplitude of unstable modes, we define a reference geometry by  $\mathbf{B}_1^r$  and  $\mathbf{B}_2^r$ , which are the time averages of the vectors  $\mathbf{B}_1$  and  $\mathbf{B}_2$  when the dynamo is operating. The geometry given by  $\mathbf{B}_1^r$  and  $\mathbf{B}_2^r$  is a dipole, and it does not change significantly above the dynamo onset. Note that below the onset and for a field applied in the Helmholtz configuration the geometry of the induced magnetic field is quite similar to the dipole geometry  $\mathbf{B}_1^r$  and  $\mathbf{B}_2^r$ . Thus we could take indifferently either the geometry of the unstable mode or the geometry of the induced field to measure the decay rates. In other words, this method can be applied even when the dynamo threshold has not been reached. The dipole and quadrupole amplitudes  $D(t)$  and  $Q(t)$  are defined by

$$D(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_1^r}{|\mathbf{B}_1^r|} + \frac{\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{B}_2^r}{|\mathbf{B}_2^r|} \right) \quad Q(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_1^r}{|\mathbf{B}_1^r|} - \frac{\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{B}_2^r}{|\mathbf{B}_2^r|} \right) \quad (1)$$

where  $|\mathbf{B}_i^r| = (\mathbf{B}_i^r \cdot \mathbf{B}_i^r)^{1/2}$ .

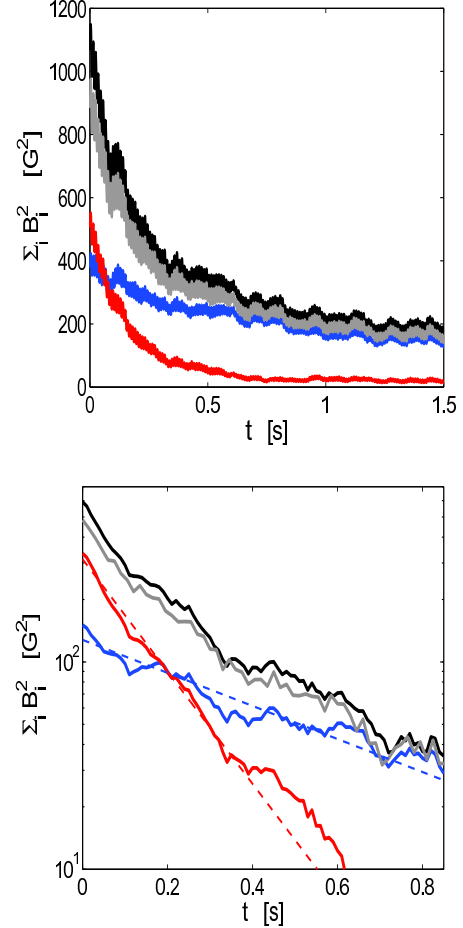


FIG. 2: For an anti-Helmoltz applied magnetic field, time series of  $(|\mathbf{B}_1|^2 + |\mathbf{B}_2|^2)/2$  (in black). Two behaviors are observed. The decay rate measured at initial time is the same as the one obtained from the quadrupolar projection (in red) and at long time, the same as the one obtained from the dipolar projection (in blue). The grey curve represents the total amount of energy in the quadrupolar and dipolar modes. Top: lin-lin scale; bottom: log-lin scale, the long time value is subtracted so that exponential decays appear as straight lines.

We show in fig. 3 different realizations of the decay of  $D(t)$  (in grey) for  $F = 11\text{Hz}$  (the applied magnetic field is shut down at  $t = 0$ ). The average over the different realizations  $\bar{D}(t)$  (black curve) exhibits an exponential decay.  $\bar{D}$  is fitted with an exponential function  $A \exp(-t/\tau) + \bar{D}_0$ , where  $\tau^{-1}$  is the decay rate and  $\bar{D}_0$  is the amplitude of the dipole without

applied magnetic field. Indeed, because of the imperfectness of the bifurcation,  $D_0$  is not exactly zero. It is created by the different sources of applied field (Earth magnetic field, remanent magnetization of the disks, ...).

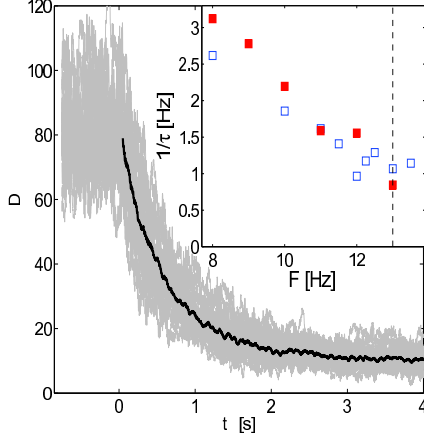


FIG. 3: Decay of the amplitude of the dipolar projection for  $F = 11 \text{ Hz}$  (applied field in the Helmholtz configuration). The thick black line is the average over the different realizations (displayed as thin grey lines). Log-lin scale in the inset.

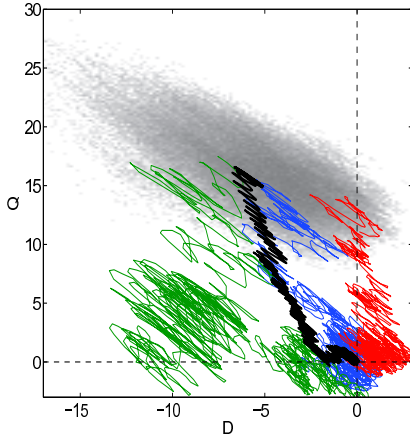


FIG. 4: Phase-space for the induced field ( $D, Q$ ) for  $F = 11 \text{ Hz}$ . The grey set contains the trajectories when a field is applied in the anti-Helmholtz configuration. The (colored online, thin) continuous curves are individual trajectories when the field is set to zero. The thick black curve is the average over the realizations.

The measured value of the decay rate is quite robust. As is displayed in the inset of fig. 3, using the projection method, the same results are obtained for the decay rate of the dipole in

the Helmholtz (resp. anti-Helmholtz) configuration. We now understand the behavior of the total energy displayed in fig. 2 for an anti-helmholtz applied field. At short time, the quadrupolar component is much larger than the dipolar one. The quadrupolar decay rate being larger than the dipolar one, after an initial phase (here of around 0.2 s), the energy of the quadrupolar component is drastically reduced and the dipolar component gives the main contribution to the energy. We note that the dipolar and the quadrupolar energy add up to nearly 80 percent of the total energy. All together, this explains why the time recording of the total energy crossovers between two different exponential behaviors. We also point out that a single configuration of applied field allows to extract both decay rates because the projection disentangles the relative contribution of each mode. This is mostly achievable with an applied field in the anti-Helmholtz configuration. Then a dominant part of the energy is initially injected in the most damped mode so that the slowest decaying mode is ultimately observed even though it has a small initial energy mostly due to imperfection in the experimental set-up or in the symmetry of the applied field.

Trajectories in phase-space also display the two successive behaviors, as shown in fig. 4. When a field is applied in the anti-Helmholtz configuration, the trajectories wander around a wide spot (in grey). Indeed turbulent fluctuations transfer energy between the modes. When the applied field is set to zero, the trajectories relax toward the origine. Turbulent fluctuations are also responsible for the observed large variability between the realizations. In contrast, the average over the realizations (thick black line) is simpler and is made of an evolution toward the  $Q = 0$  axis followed by the evolution toward  $D = Q = 0$ . Despite the fluctuations, we thus can observe in phase-space the two successive behaviors (decrease of the quadrupolar component followed by the decrease of the dipolar one).

We compare the decay rates for the dipolar and quadrupolar mode in fig. 5. For disks fitted with curved blades (upper panel), we observe that at onset ( $F = 13 \text{ Hz}$ ), the decay rate of the dipole has been reduced by a factor 2.6 compared to its value at  $F = 8 \text{ Hz}$ . The finite value of the decay rate measured at  $F = 13 \text{ Hz}$  is probably biased by the imperfection of the bifurcation (see the discussion in [8]). We note that the decay rate of the quadrupolar mode has also been reduced from  $5 \text{ s}^{-1}$  to nearly  $3 \text{ s}^{-1}$  at threshold. Within the accuracy of the measurements, the variations of the decay rates are linear in  $F$  in the range 8–13 Hz [9]. Both curves intersect the  $1/\tau = 0$  line at comparable rotation frequencies close to 17 and 20 Hz respectively.

A second set of experiments was performed with disks fitted with straight blades. In exact counter-rotation, the onset takes place at a larger value  $F = 19 \text{ Hz}$ . Between  $F = 8 \text{ Hz}$  and the onset, the dipolar decay rate is reduced by a factor 2.5. The amplitude of the variation is similar to the one observed in the case of disks fitted with curved blades. In contrast, the quadrupolar decay rate only varies from  $4.8 \text{ s}^{-1}$  to  $3.6 \text{ s}^{-1}$ . The linear fits of these curves cross the  $1/\tau = 0$  line

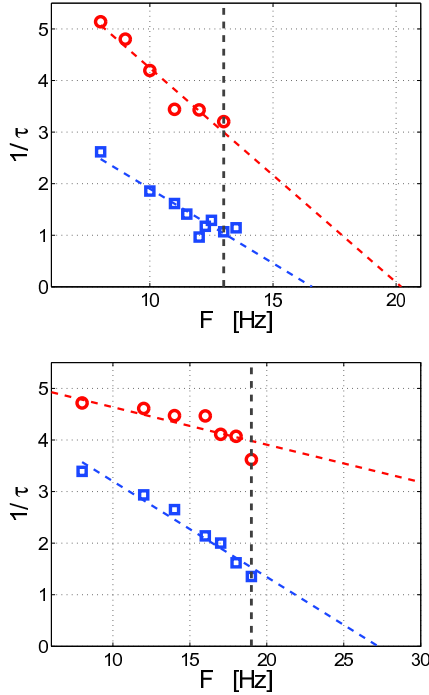


FIG. 5: Decay rate of the dipolar mode (blue square) and of the quadrupolar mode (red circle) as a function of the rotation frequency. Upper panel: the flow is driven by disks with curved blades. Dynamical regimes are observed when one of the disks rotates faster than the other one. Lower panel: the flow is driven by disks with straight blades, only stationary dynamos are observed when one disk rotates faster than the other.

at  $F = 27$  Hz for the dipolar mode and at  $F$  larger than 70 Hz for the quadrupolar one. We note that the estimated decay rates display strong fluctuations close to the dynamo threshold and thus can be sensitive to the fitting parameters. However, it is clear that the quadrupolar decay rate displays a stronger variation with  $F$  in the case of curved blades. Thus, at dynamo threshold, the quadrupolar mode is closer to its instability threshold when the flow is driven by curved blades.

These observations agree with the mechanism proposed to explain the dynamical regimes observed in the experiments [10]. The dynamical regimes (f.i. random or periodic reversals) take place when both the dipolar and the quadrupolar modes are close to their onset of instability. Then breaking the forcing symmetry, i.e. rotating with  $F_1 \neq F_2$ , couples the two modes that can achieve a saddle-node bifurcation. Above this bifurcation, periodic reversals are observed while close to the threshold of the saddle-node bifurcation, turbulent fluctuations trigger random reversals. Reversals are observed when the effect of the symmetry breaking is comparable to the difference between the growth rates of the two modes.

In the case of disks fitted with straight blades, we have con-

cluded from fig. 5 that the difference between the growth rates is quite large. We thus expect that the breaking of symmetry will not be efficient enough to generate the saddle-node bifurcation. Indeed, this is confirmed by the experimental results since no dynamical regimes are actually observed with these disks. In other words, the flow driven by these disks generates modes with strongly different thresholds. Breaking the symmetry by rotating the disks at different speed does not result in a strong enough coupling between the two modes so that no field reversals can be generated.

Finally, we discuss some statistical properties of the decay rate measured by the projection method. The decay rate  $\tau$  varies from one realization to the other, as displayed in fig. 3. The standard deviation  $\sigma$  of  $\tau$  is displayed in fig. 6. It increases in the vicinity of the onset of the dynamo instability. Values up to 50 percents are achieved for the fluctuations over the mean,  $\sigma\tau^{-1}$ . This explains why large samples are required to converge the decay rate close to the dynamo onset.

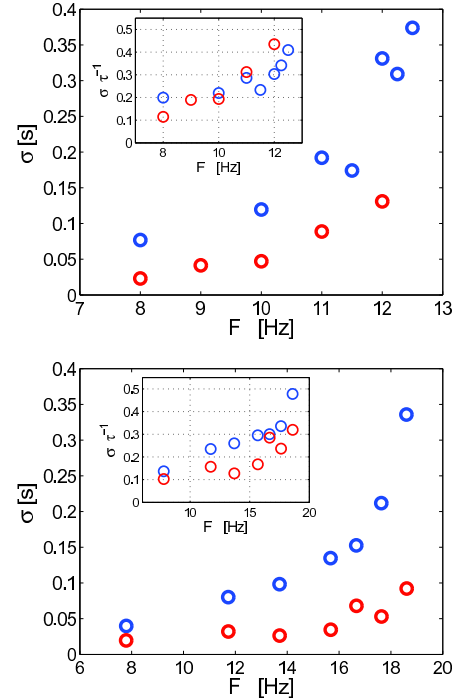


FIG. 6: Standard deviation of the decay rate of the quadrupolar (red circle) and dipolar mode (blue square). In the inset, standard deviation over the mean. Upper panel: the flow is driven by disks with curved blades. Lower panel: the flow is driven by disks with straight blades.

We acknowledge our colleagues of the VKS team with whom the experimental data used here have been obtained. This work is supported by ANR 08-0039-02, Direction des Sciences de la Matière and Direction de l'Énergie Nucléaire of CEA, Ministère de la Recherche and CNRS. The experi-

ment is operated at CEA/Cadarache DEN/DTN.

- 
- [1] Ya. B. Zeldovich, A. A. Ruzmaikin and D. D. Sokoloff, *Magnetic fields in astrophysics*, Gordon and Breach (New York, 1983).
  - [2] F. Pétrélis, N. Mordant, and S. Fauve, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **101**, 289 (2007); F. Pétrélis and A. Alexakis, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 014501 (2012).
  - [3] R. Monchaux et al. *Phys. Fluids* **21** 035108 (2009).
  - [4] F. Ravelet et al., *Phys. Rev. Lett.* **101**, 074502 (2008).
  - [5] M. Berhanu et al., *Europhys. Lett.* **77**, 59001 (2007).
  - [6] C. Gissinger, *Phys. Rev. E*, **82**, 056302 (2010).
  - [7] N. L. Peffley, A. B. Cawthorne, and D. P. Lathrop, *Phys. Rev. E* **61**, 52875294 (2000).
  - [8] S. Miralles et al., *Phys. Rev. E* **88**, 013002 (2013).
  - [9] Mechanical constraints prohibit long measurements to be performed at rotation frequencies smaller than 8 Hz.
  - [10] F. Pétrélis and S. Fauve, *J. Phys. Condens. Matter* **20**, 494203 (2008); F. Pétrélis, S. Fauve, E. Dormy and J.-P. Valet, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 144503 (2009).

# Chapitre 8

## Conclusion

### 8.1 Bilan général

#### 8.1.1 Première partie

Au cours de cette thèse, nous avons étudié expérimentalement un écoulement turbulent bidimensionnel avec l'objectif de répondre aux deux questions suivantes

- Comment déterminer et quantifier l'émergence des structures à grande échelle dans un écoulement turbulent 2D ?
- Quelles sont la dynamique temporelle et la signature fréquentielle de ces structures ?

L'expérience consiste à appliquer un champ magnétique uniforme et à injecter du courant dans une couche de métal liquide de faible épaisseur. L'avantage de cette configuration est la double utilisation du champ magnétique, qui assure la bidimensionnalité et permet de forcer l'écoulement en volume. L'écoulement laminaire est ainsi formé d'un réseau périodique de huit tourbillons contra-rotatifs. La dynamique est décrite par l'équation de Navier-Stokes 2D comportant un terme de friction linéaire et un terme de forçage. Le paramètre de contrôle est le nombre sans dimension  $Rh$ , qui quantifie le rapport entre l'inertie et la dissipation par friction.

Nous avons analysé les bifurcations successives entre le régime laminaire et chaotique. L'écoulement laminaire perd sa stabilité par une bifurcation fourche supercritique. Nous avons décrit les mécanismes de cette instabilité grâce à un modèle issu de l'équation de Navier-Stokes. Le mode instable calculé présente de fortes similarités avec celui présent lors de la transition du régime turbulent à l'état condensé.

Nous avons ensuite observé deux bifurcations de Hopf successives. Les deux fréquences associées à ces bifurcations étant incommensurables, nous avons montré que la dynamique du système évoluait sur un tore dans l'espace des phases. Ce tore perd sa stabilité et la transition vers le chaos est décrite par un scénario d'intermittence analogue à celui de Pomeau-Manneville. On observe alors l'arrivée de bouffées chaotiques dont les durées sont distribuées aléatoirement. À mesure que  $Rh$  augmente, les durées de ces phases croissent jusqu'à ce que la dynamique soit complètement chaotique.



Lorsque l'écoulement est turbulent, la distribution des amplitudes de  $U_L$ , la vitesse moyenne entre le centre de la cellule et la paroi, est gaussienne. Cependant l'émergence de structures à grande échelle brise les propriétés gaussiennes de  $U_L$  lorsque  $Rh > 12$ . La distribution de  $U_L$  s'aplatit proche de  $U_L = 0$  continûment en fonction de  $Rh$  puis présente deux maxima symétriques pour  $Rh > 18$ , correspondant aux deux amplitudes préférentielles de la circulation grande échelle.

Nous avons montré que ces distributions se décomposent comme la somme de deux gaussiennes caractérisées par  $U_m$  la valeur la plus probable de la gaussienne et  $\sigma^2$  sa variance. Cette décomposition a permis de montrer que seule la valeur la plus probable  $U_m$  change significativement au seuil et suit une courbe de bifurcation.

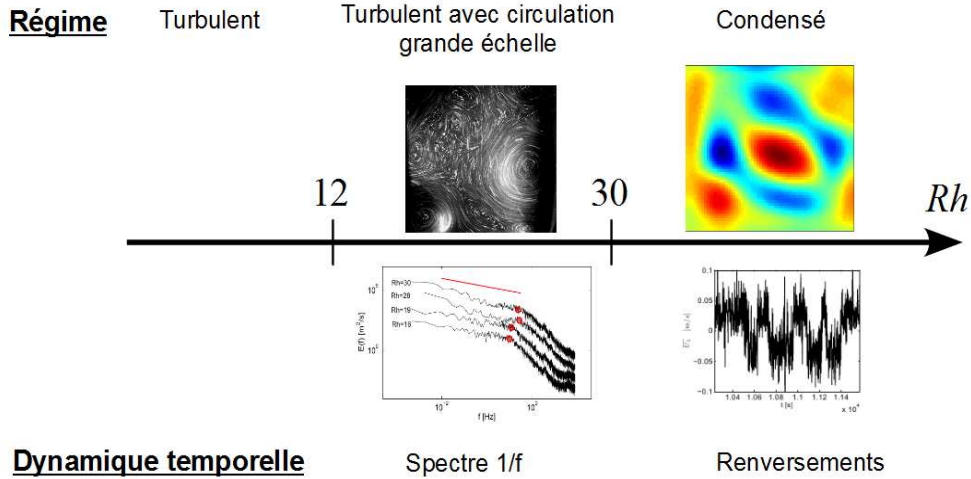
Nous avons montré que les structures à grande échelle présentent une signature spectrale particulière. En effet, les spectres fréquentiels de  $U_L$  suivent une loi de puissance aux basses fréquences, avec un exposant  $\alpha = -0.7$ . L'origine de cet exposant est associée aux changements de signe de  $U_L$ . La distribution des durées entre deux changements de signes successifs suit une loi de puissance aux temps longs, caractérisée par l'exposant  $\beta = -2.25$ . Nous avons montré que les exposants  $\alpha$  et  $\beta$  sont liés par la formule  $|\alpha + \beta| = 3$ , prédite par la théorie du renouvellement. Cette propriété cesse d'être valide lorsque  $Rh > 30$ , car le système change de régime et présente une dynamique plus cohérente, affectant ainsi l'exposant des basses fréquences.

En effet pour  $Rh = 30$ , nous avons constaté l'émergence d'une structure préférentielle dans l'écoulement. Pour quantifier ce phénomène, nous avons calculé les corrélations entre les différents champs de vorticité d'une même série temporelle. Les résultats montrent que lorsque  $Rh > 30$ , l'écoulement passe de plus en plus de temps dans une configuration particulière de vorticité. Finalement pour  $Rh > 40$ , la dynamique dans l'espace des phases reste principalement au voisinage de cette structure, qu'on nomme état condensé. L'  tat condensé est caractérisé par une dynamique cohérente sur des temps longs et par la contribution importante des composantes spatiales de Fourier  $(3, 3)$  et  $(1, 3)$  au champ de vorticité. La structure de l'état condensé s'explique ainsi par les interactions triadiques entre le mode associé au forçage, le champ de vorticité composé des modes  $(3, 3)$  et  $(1, 3)$ , et la circulation grande échelle.

Les symétries du forçage ne favorisant aucun sens de rotation, il existe deux attrac-teurs symétriques correspondant aux deux sens de rotation de l'état condensé. Nous avons ainsi observé des transitions spontanées et aléatoires entre les deux   tats. Ces   v  nements qu'on nomme renversements sont de moins en moins fréquents lorsque  $Rh$  augmente.

Pour résumer ces deux derniers chapitres, nous avons donc identifié et caractérisé deux transitions de l'écoulement turbulent associées à l'émergence de structures grandes échelles. Chacune de ces transitions comporte une dynamique temporelle propre. L'ap-

parition d'une amplitude préférentielle du sens de rotation est associée à la présence d'un bruit en  $1/f$ . Ces deux phénomènes correspondent à la formation de structures cohérentes dont les temps de vie et les amplitudes ne sont plus décrits par les propriétés classiques de la turbulence. Quant au régime condensé, il est caractérisé par une dynamique temporelle cohérente. Nous observons dans ce régime des renversements entre les attracteurs correspondant aux deux polarités du régime condensé. Ces transitions en régime turbulent ainsi que les différentes dynamiques temporelles sont représentées sur le schéma de la figure 8.1.1.



### 8.1.2 Transitions et symétries

En guise de conclusion pour la partie traitant de l'écoulement bidimensionnel, nous allons décrire les différentes transitions étudiées dans cette thèse par rapport aux symétries du système.

Sur la figure 8.1, nous avons représenté les régimes en fonction de  $Rh$ , et leur distribution de  $U_L$  associée. Les symétries du système sont identiques à celles de l'écoulement laminaire, qui est la réponse linéaire de l'écoulement au forçage. Dans ce régime, la circulation à grande échelle est identiquement nulle car le système est invariant par symétrie selon les axes  $0x$  et  $0y$ . Tous les régimes garderons ces symétries, ce qui implique que  $U_L \rightarrow -U_L$ .

La première bifurcation à  $Rh = 1.5$  brise ces deux symétries par la présence d'une circulation à grande échelle. La grandeur  $U_L$  peut prendre deux valeurs opposées et cette valeur est sélectionnée par les conditions initiales. La moyenne statistique sur les différentes réalisations nous permet de retrouver  $\langle U_L \rangle = 0$ .

La succession de quatre bifurcations mène l'écoulement à un régime chaotique, puis turbulent. Avant  $Rh = 3$ , les deux attracteurs caractérisés par une polarité de  $U_L$  sont clairement séparés dans l'espace des phases. A partir de  $Rh = 3$ , le système va

progressivement connecter ces deux solutions, jusqu'à ce que la dynamique explore indifféremment les deux polarités dans le régime chaotique. Les fluctuations turbulentes restaurent statistiquement les symétries du système. De plus, nous avons montré que le régime turbulent est caractérisé par une distribution gaussienne de  $U_L$ , dont l'amplitude la plus probable vaut zéro.

L'écart au comportement gaussien à  $Rh = 12$ , présenté dans la section 5.3, s'explique par la présence d'une amplitude préférentielle de circulation différente de zéro. On peut assimiler cette transition à une brisure de symétrie de la valeur la plus probable. L'écoulement étant toujours turbulent, les fluctuations permettent au système d'explorer continuellement les deux polarités, la moyenne temporelle de  $U_L$  restant nulle.

Les renversements entre les deux sens de circulation à grande échelle à  $Rh > 30$ , indique que l'espace des phases commence à se scinder en deux parties correspondant aux deux polarités de  $U_L$ . Ce comportement se comprend comme la continuité de la transition précédente, avec une amplitude préférentielle de rotation associée à une région maintenant bien définie dans l'espace des phases. Si l'augmentation de  $Rh$  aboutit à une fréquence des renversements tendant vers zéro ou à une séparation nette des deux attracteurs, l'écoulement aura de nouveau brisé les symétries en sélectionnant, selon les conditions initiales, le sens de circulation à grande échelle. A haut  $Rh$ , les fluctuations turbulentes ne permettront plus aux systèmes d'explorer les différentes polarités, contrairement à la transition précédente. Seule la moyenne statistique  $\langle U_L \rangle$  sera nulle.

Nous avons ainsi pu suivre les différentes brisures et restauration de symétries du système sur une large gamme de nombre  $Rh$  et  $Re$ . Même si l'écoulement est turbulent, les deux dernières transitions peuvent être associées à des brisures de symétries distinctes. Ces deux derniers exemples vont donc à l'encontre d'une croyance, qui veut que les écoulements turbulents restaurent les symétries pour des Reynolds asymptotiquement grands. En effet, l'augmentation progressive du forçage à dissipation constante favorise l'émergence de structures cohérentes dont les temps de vie dépassent les temps typiques de cohérence en turbulence. Le système reste ainsi préférentiellement dans certaines régions de l'espace des phases, brisant ainsi les propriétés de mélange ou d'ergodicité des écoulements turbulents.

### 8.1.3 Seconde partie

Dans la seconde partie, nous avons présenté des résultats de l'expérience VKS. Nous avons montré que la détermination du temps de décroissance du mode quadrupolaire à partir de la décroissance de l'énergie magnétique était nécessairement biaisée par la présence de la composante dipolaire proche du seuil de l'instabilité dynamo. La décomposition du champ magnétique en composante dipolaire et quadrupolaire a permis d'extraire les temps de décroissance associés à ces modes. Ces résultats confirment que les régimes dynamiques du champ magnétique sont associées à la proximité des seuils du dipôle et du quadrupôle.

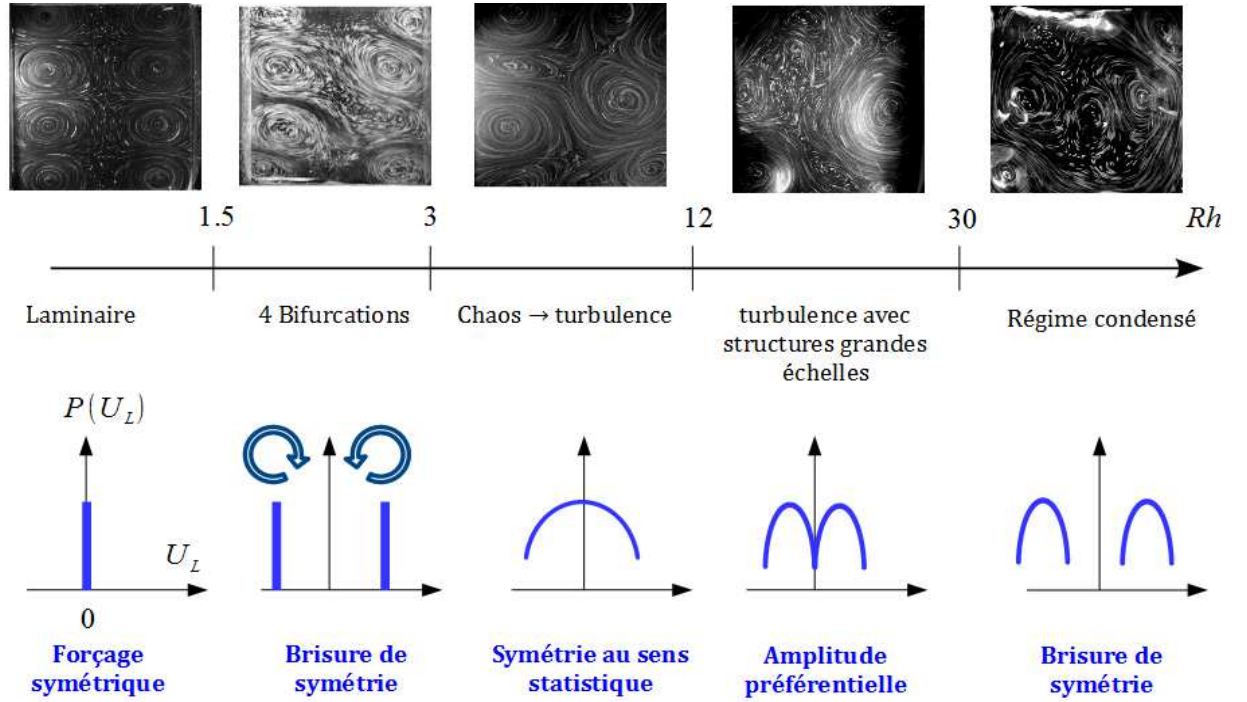


FIGURE 8.1 – Illustration des différents régime en fonction du paramètre de contrôle  $Rh$ .

## 8.2 Perspectives

Nous avons montré dans les chapitres 1 et 2, les avantages de l'utilisation d'un métal liquide pour le montage expérimental. Cependant les techniques de mesure associées sont limitées par rapport aux méthodes usuelles en mécanique des fluides. Notre méthode de suivi de particules sur une surface métallique est une première étape pour obtenir des informations plus précises sur la structure de l'écoulement.

À partir de champs de vitesse mieux résolus, il serait intéressant d'étudier plus en détails les mécanismes non linéaires permettant l'émergence des structures grandes échelles. Ce type d'information permettrait d'expliquer l'origine des temps de vie particulièrement longs des structures cohérentes, observées dans le chapitre 4.

Du point de vue théorique, il reste à déterminer l'origine de la première transition caractérisée par le changement de forme des distributions. On peut se demander si cette transition peut être décrite par un formalisme basé sur des équations d'amplitudes avec du bruit additif ou multiplicatif.

Il reste aussi de nombreuses pistes à explorer pour comprendre la dynamique temporelle et la structure de l'état condensé. Notre méthode de détection des récurrences à partir des corrélations entre champs de vorticité nous a permis d'identifier des structures récurrentes en terme de forme. Il serait donc intéressant de savoir si ces configurations sont associées à une structure particulière dans l'espace des phases, comme un cycle limite ou un point fixe, qui expliquerait pourquoi le système revient toujours proche de cette configuration.

Ce problème pourrait être analysé grâce aux nouveaux outils numériques permettant la capture de points fixes et de cycles limites. Cette approche a par exemple permis de comprendre les transitions sous-critiques d'écoulements hydrodynamiques et magnétohydrodynamiques. Dans notre système, la capture d'une de ces solutions nous permettrait de comprendre la structure ainsi que la stabilité de l'état condensé dans l'espace des phases.

Dans ce même régime, les mesures des sondes Vives ont montré que les trajectoires des renversements se simplifiaient lorsque  $Rh > 40$ . La capture de renversements avec le suivi de particule permettrait ainsi de comprendre mieux l'origine de ces renversements dans cette gamme de  $Rh$ , correspondant à de grandes amplitudes du forçage.



# Bibliographie

- [1] P. BAK, C. TANG et K. WIESENFELD : Self-organized criticality - An explanation of  $1/f$  noise. *Physical Review Letters*, 59:381–384, juillet 1987.
- [2] A. C. BARBOSA AGUIAR, P. L. READ, R. D. WORDSWORTH, T. SALTER et Y. HIRO YAMAZAKI : A laboratory model of Saturn’s North Polar Hexagon. *Icarus*, 206:755–763, avril 2010.
- [3] G. K. BATCHELOR : Computation of the Energy Spectrum in Homogeneous Two-Dimensional Turbulence. *Physics of Fluids*, 12:233, janvier 1969.
- [4] M. BERHANU, B. GALLET, R. MONCHAUX, M. BOURGOIN, P. ODIER, J.-F. PINTON, N. PLIHON, R. VOLK, S. FAUVE, N. MORDANT, F. PÉTRÉLIS, S. AUMAÎTRE, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, B. DUBRULLE et F. RAVELET : Bistability between a stationary and an oscillatory dynamo in a turbulent flow of liquid sodium. *Journal of Fluid Mechanics*, 641:217, décembre 2009.
- [5] M. BERHANU, G. VERHILLE, J. BOISSON, B. GALLET, C. GISSINGER, S. FAUVE, N. MORDANT, F. PÉTRÉLIS, M. BOURGOIN, P. ODIER, J.-F. PINTON, N. PLIHON, S. AUMAÎTRE, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, B. DUBRULLE et C. PIRAT : Dynamo regimes and transitions in the VKS experiment. *European Physical Journal B*, 77:459–468, octobre 2010.
- [6] R. BLENDER, X. ZHU et K. FRAEDRICH : Observations and modelling of  $1/f$ -noise in weather and climate. *Advances in Science and Research*, 6:137–140, mai 2011.
- [7] R. BRAUN, F. FEUDEL et N. SEEHAFFER : Bifurcations and chaos in an array of forced vortices. *Phys. Rev. E*, 55:6979–6984, juin 1997.
- [8] G. J. CHANDLER et R. R. KERSWELL : Invariant recurrent solutions embedded in a turbulent two-dimensional Kolmogorov flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 722:554–595, mai 2013.
- [9] P. CHOSSAT et M. GOLUBITSKY : Symmetry-increasing bifurcation of chaotic attractors. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 32:423–436, décembre 1988.
- [10] Y. COUDER et C. BASDEVANT : Experimental and numerical study of vortex couples in two-dimensional flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 173:225–251, décembre 1986.

- [11] Y. COUDER, J. M. CHOMAZ et M. RABAUD : On the hydrodynamics of soap films. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 37:384–405, juillet 1989.
- [12] S. DANILOV et D. GURARIE : Forced two-dimensional turbulence in spectral and physical space. *Phys. Rev. E*, 63(6):061208, juin 2001.
- [13] P.A. DAVIDSON : *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2001. ISBN 9780521794879. URL <http://books.google.fr/books?id=t4dg3scoE5AC>.
- [14] Chiechi R. C. Larsen R. J. Weiss E. A. Weitz D. A. DICKEY, M. D. et G. M. WHITESIDES : Eutectic Gallium-Indium (EGaIn) : A Liquid Metal Alloy for the Formation of Stable Structures in Microchannels at Room Temperature. *Adv. Funct. Mater.*, 2008.
- [15] P. DMITRUK et W. H. MATTHAEUS : Low-frequency  $1/f$  fluctuations in hydrodynamic and magnetohydrodynamic turbulence. *Phys. Rev. E*, 76(3):036305, septembre 2007.
- [16] P. DMITRUK, P. D. MININNI, A. POUQUET, S. SERVIDIO et W. H. MATTHAEUS : Emergence of very long time fluctuations and  $1/f$  noise in ideal flows. *Phys. Rev. E*, 83(6):066318, juin 2011.
- [17] J.-P. ECKMANN, S. OLIFFSON KAMPHORST et D. RUELLE : Recurrence plots of dynamical systems. *EPL (Europhysics Letters)*, 4:973, novembre 1987.
- [18] G. L. EYINK : A turbulent constitutive law for the two-dimensional inverse energy cascade. *Journal of Fluid Mechanics*, 549:191–214, 2006.
- [19] M. FARGE, K. SCHNEIDER et N. KEVLAHAN : Non-Gaussianity and coherent vortex simulation for two-dimensional turbulence using an adaptive orthogonal wavelet basis. *Physics of Fluids*, 11:2187–2201, août 1999.
- [20] R. FJORTOFT : On changes in the spectral distribution of kinetic energy in two-dimensional non-divergent flow. *Tellus*, 1953.
- [21] B. GALLET, S. AUMAÎTRE, J. BOISSON, F. DAVIAUD, B. DUBRULLE, N. BONNEFOY, M. BOURGOIN, P. ODIER, J.-F. PINTON, N. PLIHON, G. VERHILLE, S. FAUVE et F. PÉTRÉLIS : Experimental Observation of Spatially Localized Dynamo Magnetic Fields. *Physical Review Letters*, 108(14):144501, avril 2012.
- [22] B. GALLET, J. HERAULT, C. LAROCHE, F. PÉTRÉLIS et S. FAUVE : Reversals of a large-scale field generated over a turbulent background. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 106:468–492, août 2012.
- [23] B. GALLET et W. R. YOUNG : A two-dimensional vortex condensate at high Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 715:359–388, janvier 2013.
- [24] Basile GALLET : *Dynamique d'un champ à grande échelle engendré sur un fond turbulent*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Paris - ENS Paris, 2011.



- [25] T. GEISEL : Lévy walks in chaotic systems : Useful formulas and recent applications. In M. F. SHLESINGER, G. M. ZASLAVSKY et U. FRISCH, éditeurs : *Lévy Flights and Related Topics in Physics*, volume 450 de *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, pages 151–173, 1995.
- [26] M. GERMANO : Turbulence - The filtering approach. *Journal of Fluid Mechanics*, 238:325–336, mai 1992.
- [27] E. GKIOULEKAS et K.-K. TUNG : Recent Developments in Understanding Two-dimensional Turbulence and the Nastrom-Gage Spectrum. *Journal of Low Temperature Physics*, 145:25–57, novembre 2006.
- [28] J. P. GOLLUB et S. V. BENSON : Many routes to turbulent convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 100:449–470, octobre 1980.
- [29] K. GOTOH et M. YAMADA : The instability of rhombic cell flows. *Fluid Dynamics Research*, 1:165–176, mai 1987.
- [30] P. N. GUZDAR, J. M. FINN, A. V. ROGALSKY et J. F. DRAKE : Two-dimensional nonlinear dynamics of four driven vortices. *Phys. Rev. E*, 49:2062–2069, mars 1994.
- [31] A. E. HANSEN, D. MARTEAU et P. TABELING : Two-dimensional turbulence and dispersion in a freely decaying system. *Phys. Rev. E*, 58:7261–7271, décembre 1998.
- [32] J. HARTMANN et F. LAZARUS : Experimental investigations on the flow of mercury in a homogeneous magnetic field. *K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat.Fys. Medd.*, 22:701–707, 1937.
- [33] M. HOSSAIN, W. H. MATTHAEUS et D. MONTGOMERY : Long-time states of inverse cascades in the presence of a maximum length scale. *Journal of Plasma Physics*, 30:479–493, décembre 1983.
- [34] R. H. KRAICHNAN : Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence. *Physics of Fluids*, 10:1417–1423, juillet 1967.
- [35] R. H. KRAICHNAN : Eddy viscosity in two and three dimensions. *Journal of Atmospheric Sciences*, 33:1521–1536, août 1976.
- [36] C. E. LEITH : Diffusion Approximation for Two-Dimensional Turbulence. *Physics of Fluids*, 11:671–672, mars 1968.
- [37] R. J. LINGWOOD et T. ALBOUSSIÈRE : On the stability of the Hartmann layer. *Physics of Fluids*, 11:2058–2068, août 1999.
- [38] S. B. LOWEN et M. C. TEICH : Fractal renewal processes generate  $1/f$  noise. *Phys. Rev. E*, 47:992–1001, février 1993.
- [39] P. MANNEVILLE : Intermittency, self-similarity and  $1/f$  spectrum in dissipative dynamical systems. *Le journal de physique*, 43:1235–1243, novembre 1980.

- [40] P. MANNEVILLE : *Instabilités, chaos et turbulence*. Ed. de l'École Polytechnique, 2004. ISBN 9782730209137. URL <http://books.google.fr/books?id=meAS0hi7djYC>.
- [41] N. MARWAN, M. CARMEN ROMANO, M. THIEL et J. KURTHS : Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Phys. Rep.*, 438:237–329, janvier 2007.
- [42] W. H. MATTHAEUS et M. L. GOLDSTEIN : Low-frequency 1/f noise in the interplanetary magnetic field. *Physical Review Letters*, 57:495–498, juillet 1986.
- [43] J. MAURER et A. LIBCHABER : Effect of the Prandtl number on the onset of turbulence in liquid 4He. *J. Physique - LETTRES*, 41:515–518, novembre 1980.
- [44] P. E. MERILEES et H. WARN : On energy and enstrophy exchanges in two-dimensional non-divergent flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 69:625–630, juin 1975.
- [45] P. MISHRA, J. HERAULT, S. FAUVE et Verma P. : Dynamics of reversal and condensate state in 2D Kolmogorov flow. *in preparation*.
- [46] D. MOLENAAR, H. J. H. CLERCX et G. J. F. VAN HEIJST : Angular momentum of forced 2D turbulence in a square no-slip domain. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 196:329–340, septembre 2004.
- [47] P. MORESCO et T. ALBOUSSIERE : Experimental study of the instability of the Hartmann layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 504:167–181, avril 2004.
- [48] M. NIEMANN, H. KANTZ et E. BARKAI : Fluctuations of 1/f Noise and the Low-Frequency Cutoff Paradox. *Physical Review Letters*, 110(14):140603, avril 2013.
- [49] J. PARET et P. TABELING : Intermittency in the two-dimensional inverse cascade of energy : Experimental observations. *Physics of Fluids*, 10:3126–3136, décembre 1998.
- [50] F. PÉTRÉLIS, S. FAUVE, E. DORMY et J.-P. VALET : Simple Mechanism for Reversals of Earth's Magnetic Field. *Physical Review Letters*, 102(14), avril 2009.
- [51] Y. POMEAU et P. MANNEVILLE : Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Communications in Mathematical Physics*, 74:189–197, juin 1980.
- [52] F. SCHMITT, S. VANNITSEM et A. BARBOSA : Modeling of rainfall time series using two-state renewal processes and multifractals. *J. Geophys. Res.*, 103:23181, septembre 1998.
- [53] M. SHATS, D. BYRNE et H. XIA : Turbulence Decay Rate as a Measure of Flow Dimensionality. *Physical Review Letters*, 105(26):264501, décembre 2010.
- [54] G. SIVASHINSKY et V. YAKHOT : Negative viscosity effect in large-scale flows. *Physics of Fluids*, 28:1040–1042, avril 1985.

- [55] L. M. SMITH et V. YAKHOT : Bose condensation and small-scale structure generation in a random force driven 2D turbulence. *Physical Review Letters*, 71:352–355, juillet 1993.
- [56] J. SOMMERIA : Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box. *Journal of Fluid Mechanics*, 170:139–168, septembre 1986.
- [57] J. SOMMERIA et R. MOREAU : Why, how, and when, MHD turbulence becomes two-dimensional. *Journal of Fluid Mechanics*, 118:507–518, 1982.
- [58] J. SOMMERIA et J. VERRON : An investigation of nonlinear interactions in a two-dimensional recirculating flow. *Physics of Fluids*, 27:1918–1920, août 1984.
- [59] P. TABELING : Two-dimensional turbulence : a physicist approach. *Phys. Rep.*, 362:1–62, mai 2002.
- [60] P. TABELING, B. PERRIN et S. FAUVE : Instability of a linear array of forced vortices. *EPL (Europhysics Letters)*, 3:459, février 1987.
- [61] A. THESS : Instabilities in two-dimensional spatially periodic flows. I - Kolmogorov flow. II - Square eddy lattice. *Physics of Fluids*, 4:1385–1407, juillet 1992.
- [62] C. TROPEA, A.L. YARIN et J.F. FOSS : *Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics*. Numéro vol. 1 in Gale virtual reference library. Springer, 2007. ISBN 9783540251415.
- [63] G. J. F. van HEIJST, R. C. KLOOSTERZIEL et C. W. M. WILLIAMS : Laboratory experiments on the tripolar vortex in a rotating fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 225:301–331, avril 1991.
- [64] M. B. WEISSMAN : 1f noise and other slow, nonexponential kinetics in condensed matter. *Reviews of Modern Physics*, 60:537–571, avril 1988.
- [65] M. G. WELLS, H. J. H. CLERCX et G. J. F. VAN HEIJST : Vortices in oscillating spin-up. *Journal of Fluid Mechanics*, 573:339–369, 2007.
- [66] H. XIA, M. SHATS et G. FALKOVICH : Spectrally condensed turbulence in thin layers. *Physics of Fluids*, 21(12):125101, décembre 2009.
- [67] Z. XIAO, M. WAN, S. CHEN et G. L. EYINK : Physical mechanism of the inverse energy cascade of two-dimensional turbulence : a numerical investigation. *Journal of Fluid Mechanics*, 619:1, décembre 2008.
- [68] William R. YOUNG : Anomalous Diffusion . *In Lectures on Stirring and Mixing from the 1999 Woods Hole Program in Geophysical Fluid Dynamics*, 1999.